REPASO DERIVADAS

Incrementos

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro, es la diferencia que se obtiene al restar el valor inicial del valor final.

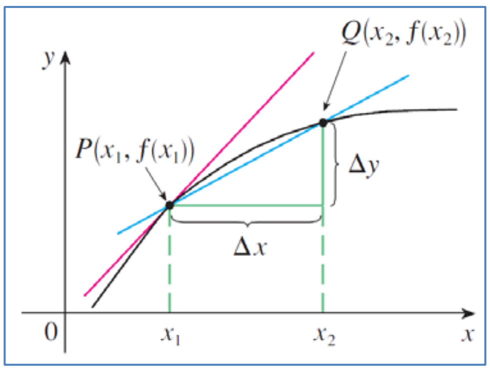
$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Un incremento de x se representa por el símbolo Δx, que se lee "delta x" o "incremento de x". Este incremento puede ser positivo o negativo, según la variable en cuestión aumente o disminuya al cambiar el valor.

$$\Delta y = \text{significa el incremento de } y$$
$$\Delta \phi = \text{significa el incremento de } \phi$$
$$\Delta f(x) = \text{significa el incremento de } f(x)$$

Si en $y = f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicara el incremento correspondiente de la función $f(x)$.

El incremento Δy siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de y, que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de x desde el cual se cuenta el incremento de x.



Definición de derivada

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada.

Ya que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, la derivada se queda como:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Notación de la derivada

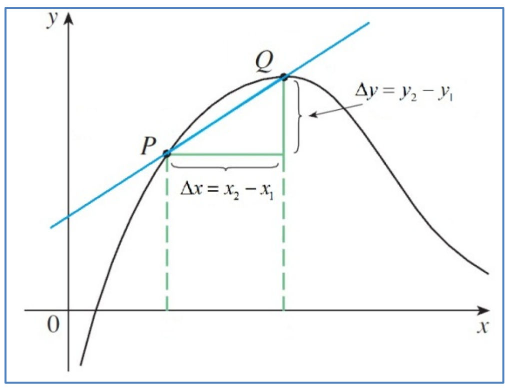
$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x) = D_x y = D_x f(x)$$

Por lo tanto $\frac{d(\ )}{dx}$ es el operador derivada.

Interpretación Geométrica de la Derivada

Una de las principales motivaciones para el desarrollo de la derivada fue el problema de encontrar la pendiente de una recta tangente a un punto de una gráfica. A continuación explicamos dicho problema.

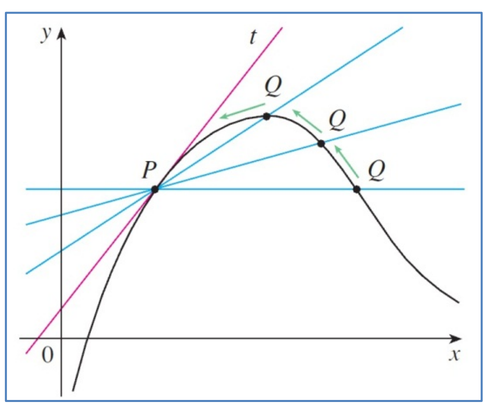
Supongamos que trazamos una recta secante en la curva de $y = f(x)$, que además pasa por los puntos P y Q de la función (recta azul).



Para obtener la pendiente de esta secante utilizamos la conocida ecuación de geometría analítica:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si empezamos a trazar rectas secantes haciendo que el punto Q se mueva sobre curva de $y = f(x)$, aproximándose cada vez más al punto P el cual permanece fijo.



Al hacer esto vemos que los valores de Δx y Δy disminuyen. Cuando el punto Q casi llega al punto P, la recta secante alcanza su posición “límite”, en este punto Δx es casi cero, por lo tanto se dice que $\Delta x \to 0$, y por definición la recta secante PQ se transforma en la recta tangente a la curva en el punto P.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\theta=\tan\theta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto la interpretación geométrica de la derivada nos dice que la pendiente de una recta tangente a un punto de una función, no es otra cosa que la derivada de la función evaluada en dicho punto P.

$$m_t=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

Cálculo de la derivada a partir de la definición

En algunas bibliografías se le nombra el método de los cuatro pasos:

$$\frac{dy}{dx}=\overset{4}{\lim_{\Delta x\to 0}}\frac{f(x\overset{1}{+}\Delta x)-\overset{2}{f}(x)}{\underset{3}{\Delta x}}$$

En el paso 1 se incrementa la función, en el paso 2 se resta la función original, en el paso 3 se divide por él Δx y en el paso 4 se evalúa el límite.

Ejemplo: calcular la derivada de la función $y=f(x)=3x^2+5$

paso 1
$$y+\Delta y=3\left(x+\Delta x\right)^2+5$$
$$y+\Delta y=3\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)+5$$
$$y+\Delta y=3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2+5$$

paso 2
$$\begin{array}{rl} y+\Delta y= & \cancel{3x^2}+6x\Delta x+3\Delta x^2+\cancel{5} \\ -y\quad = & -\cancel{3x^2}\qquad\qquad\qquad\quad -\cancel{5} \\ \hline \Delta y= & 6x\Delta x+3\Delta x^2 \end{array}$$

paso 3
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left(6x+3\Delta x\right)}{\Delta x}=6x+3\Delta x$$

paso 4
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x+\cancel{3\Delta x}\right)=6x$$

$$\left.\frac{d\left(3x^2+5\right)}{dx}=6x\right|$$

Regla de la Cadena (Derivada de una función compuesta)

Recordemos que la función compuesta $f \circ g$ se define como: $\left(f \circ g\right)\left(x\right) = f\left(g(x)\right)$

A $g(x)$ se le llama la función interna y a $f(x)$ la función externa.

"la derivada de $\left(f \circ g\right)$ es el producto de la derivada de la función externa f evaluada en $g(x)$ y la derivada de la función interna evaluada en x". Se asume que g es diferenciable en x y que f es diferenciable en $g(x)$.

$$\frac{d\left(f\left(g(x)\right)\right)}{dx} = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Formulación alternativa de la regla de la cadena

Sea $u = g(x)$ y $y = f(u)$, entonces la función compuesta de g y de f es $y = f(u) = f\left(g(x)\right)$, y se tiene la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena

En la formulación alternativa de la regla de la cadena, la y de la izquierda denota la función compuesta de x, mientras que la y de la derecha señala la función original.

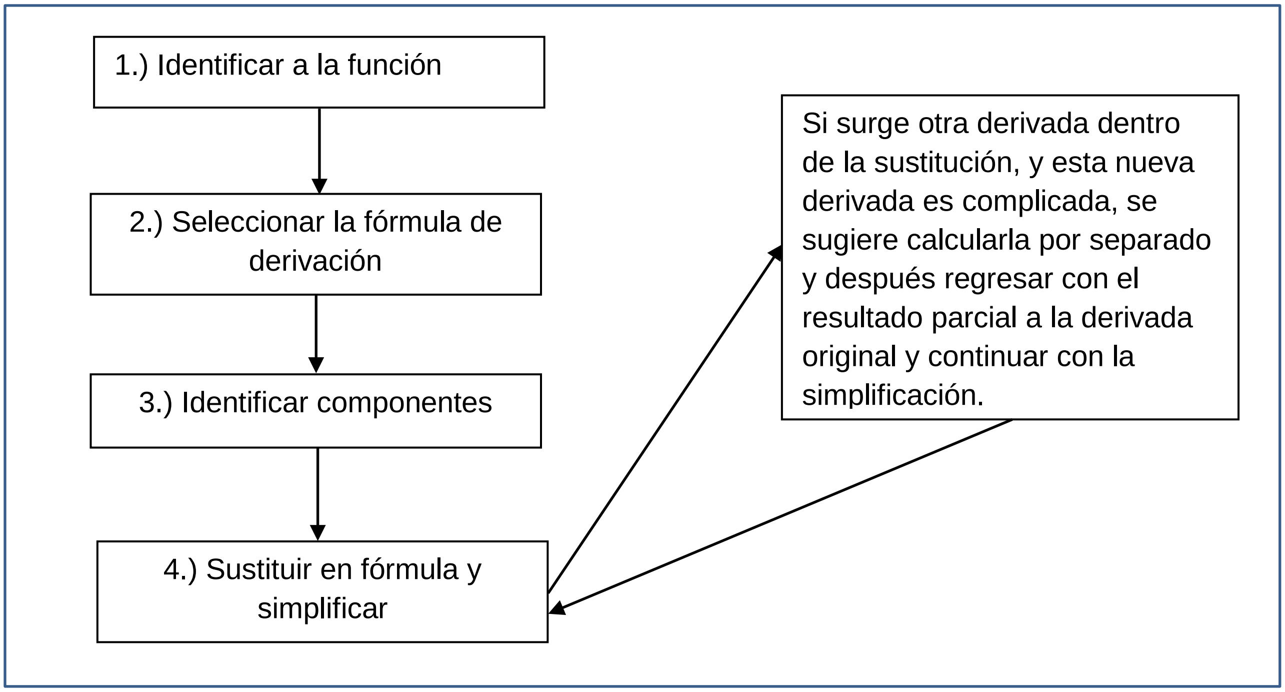
Es de gran importancia esta regla debido a que casi todas las fórmulas de derivación están basadas en la regla de la cadena, por ejemplo en la fórmula $\frac{d\left(u^n\right)}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$, el factor nu^{n-1} de la fórmula representa a $\frac{dy}{du}$ de la regla de la cadena.

Ejemplo: Sea $y = u^3 = f(x)$ y $u = 4x^2 - 2x + 5 = g(x)$.

Entonces $\left(f \circ g\right)\left(x\right) = f\left(g(x)\right) = g^3 = \left(4x^2 - 2x + 5\right)^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(u^3\right)}{du} \cdot \frac{d\left(4x^2 - 2x + 5\right)}{dx} = 3u^2\left(8x - 2\right) = 3\left(4x^2 - 2x + 5\right)^2\left(8x - 2\right)$$

Para fines prácticos calcularemos derivadas por medio de fórmulas, se deja al estudiante que así lo desee la consulta de la obtención de dichas fórmulas[1]. A continuación se presenta un procedimiento para el cálculo de derivadas:



En el paso 1 la identificación de la función es crucial, ya que si identificamos mal el tipo de función, seleccionaremos erróneamente la fórmula de derivación y todo lo que hagamos en los pasos 3 y 4 será infructuoso. En muchas ocasiones, a fin de identificar la función a derivar es necesario realizar una manipulación algebraica para poder aplicar alguna fórmula de derivación como en el ejemplo 1.

Ejemplo 1. Derivar la función $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

Paso 1. A fin de identificar la función se emplearán las leyes de los radicales y de los exponentes para ver que se trata de una suma de funciones potenciales:

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{4}{x^{\frac{3}{4}}}=2x^{-\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{3}{4}}$$

Paso 2. Al seleccionar la fórmula empleamos la fórmula de potencia de una variable:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$$

Paso 3. Los componentes los identificamos en el paréntesis, y para este ejemplo son las potencias n de cada suma.

[1] Podemos encontrar esta información en la referencia 2. Stewart.

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{d\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{dx}+6\frac{d\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)}{dx}-2\frac{d\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)}{dx}-4\frac{d\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)}{dx}$$
$$n=-\tfrac{1}{2}\qquad n=-\tfrac{1}{3}\qquad n=-\tfrac{3}{2}\qquad n=-\tfrac{3}{4}$$

Paso 4. Al sustituir en la fórmula tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=2\left[-\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right)\right]+6\left[-\frac{1}{3}\left(x^{-\frac{1}{3}-1}\right)\right]-2\left[-\frac{3}{2}\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)\right]-4\left[-\frac{3}{4}\left(x^{-\frac{3}{4}-1}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)-\frac{6}{3}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)+\frac{\cancel{2}(3)}{\cancel{2}}\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)+\frac{\cancel{4}(3)}{\cancel{4}}\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+\frac{3}{x^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{x^{\frac{7}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{3}{\sqrt{x^5}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}=\boxed{-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{x^2\sqrt{x}}+\frac{3}{x\sqrt[4]{x^3}}}$$

Ejemplo 2. Derivar la función $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

Paso 1. Esta es una función compuesta, en principio es un producto de funciones y uno de los factores es una función potencial (el radical):

$$y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}=(x-1)\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Paso 2. Emplearemos la fórmula del producto de dos funciones:

$$\frac{d}{dx}(u\,v)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

Paso 3. Los componentes los identificamos en el paréntesis, y para este ejemplo son las potencias n de cada suma.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x-1)\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right],\qquad u=(x-1)\qquad v=\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Paso 4. Al sustituir en la fórmula tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}\cancel{\frac{d}{dx}(x-1)}^{1}+(x-1)\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Al momento de sustituir apreciamos que surgen dos derivadas, de las cuales la primera es bastante sencilla, la derivada de x es uno y la derivada de -1 es cero por ser una constante. Pero para la segunda derivada no es el mismo caso, es más complicada por lo que optamos por calcularla por separado y una vez que tengamos el resultado, volvemos con este a la derivada original.

$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, es una función compuesta del tipo potencial, por lo que emplearemos la fórmula $\frac{d}{dx}\left(u^n\right)=nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$, resultando los componentes $u=x^2-2x+2$ y $n=\frac{1}{2}$.

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+2\right)$$

Nuevamente surge otra derivada

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+2\right)=\frac{d\left(x^2\right)}{dx}-2\frac{\cancel{d}\left(\cancel{x}\right)^{1}}{\cancel{dx}}+\frac{\cancel{d}\left(\cancel{2}\right)^{0}}{\cancel{dx}}$$

$$=2x^{2-1}-2$$

$$=2x-2$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x-2\right)$$

$$=\frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\left(x^2-2x+2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

Ya con este resultado parcial regresamos a la derivada original:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{1}+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2+(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x^2-2x+2+x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

Las funciones trigonométricas son más sencillas que las algebraicas compuestas.

Ejemplo 3. Derivar la función $y=\operatorname{sen}3x+\cos 2x$.

Paso 1. La función es una suma de funciones trigonométricas, y son de fácil identificación.

Paso 2. Las fórmulas a emplear son: $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}u\right)=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\left(\cos u\right)=-\operatorname{sen}u\cdot\frac{du}{dx}$.

Paso 3. Los componentes son $u=3x$ para el seno y $u=2x$ para el coseno .

Paso 4. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\cos 3x\cdot\frac{\cancel{d}\left(\cancel{3x}\right)^{3}}{\cancel{dx}}+\left(-\operatorname{sen}2x\right)\frac{\cancel{d}\left(\cancel{2x}\right)^{2}}{\cancel{dx}}=3\cos 3x-2\operatorname{sen}2x$$

En este último ejercicio debemos tener cuidado de no multiplicar los números resultantes de las dos derivadas por el argumento de la funciones trigonométricas, nunca hacer $3\left(3x\right)=9x$, ni $2\left(2x\right)=4x$ ya que el $\cos 3x$ son una misma expresión al igual que él $\operatorname{sen}2x$.

Ejemplo 4. Derivar la función $y=\tan^2(e^{3x})$.

Paso 1. La función es una compuesta de una potencia y el argumento de la tangente es una función exponencial: $y=f(x)=\left(\tan\left(e^{3x}\right)\right)^2$

Paso 2. La fórmula a emplear es:

Paso 3. Los componentes son $u=\tan\left(e^{3x}\right)$ y $n=2$.

Paso 4. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=2\left(\tan\left(e^{3x}\right)\right)^{2-1}\cdot\frac{d\tan\left(e^{3x}\right)}{dx}{}_{\mathbf{1}}$$

Se calcula aparte

$$\frac{d\tan\left(e^{3x}\right)}{dx}=\sec^{2}\left(e^{3x}\right)\cdot\frac{d\left(e^{3x}\right)}{dx}{}_{\mathbf{2}}$$

$$=\sec^{2}\left(e^{3x}\right)\cdot 3e^{3x}$$

$$=3e^{3x}\cdot\sec^{2}\left(e^{3x}\right)$$

$$\frac{d\left(e^{3x}\right)}{dx}=e^{3x}\cdot\frac{\cancel{d(3x)}^{\,3}}{\cancel{dx}}{}_{\mathbf{3}}$$

$$=3e^{3x}$$

$$\frac{dy}{dx}=2\tan\left(e^{3x}\right)\cdot\left(3e^{3x}\sec^{2}\left(e^{3x}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=6e^{3x}\tan\left(e^{3x}\right)\cdot\sec^{2}\left(e^{3x}\right)$$

Al surgir la primera derivada (**1**), la fórmula utilizada es $\frac{d}{dx}\left(\tan u\right)=\sec^{2}u\cdot\frac{du}{dx}$ y el componente es $u=e^{3x}$.

Para la segunda derivada (**2**), se empleó la fórmula $\frac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}$ y el componente es $u=3x$ y la tercera derivada (**3**), es de fácil solución.

Para las funciones logarítmicas y exponenciales, todavía es más sencillo el cálculo de estas derivadas.

Ejemplo 5. Derivar la función $y=\ln(3x^{2}-5)$.

Paso 1. La función es del tipo logarítmica.

Paso 2. La fórmula a emplear es: $\frac{d}{dx}\left(\ln u\right)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

Paso 3. El componente es $u=3x^{2}+5$.

Paso 4. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^{2}+5}\cdot\frac{\cancel{d\left(3x^{2}+5\right)}^{\,6x}}{\cancel{dx}}=\boxed{\frac{6x}{3x^{2}+5}}$$

Ejemplo 6. Derivar la función $y=\ln\frac{x^{4}}{(3x-4)^{2}}$.

Paso 1. La función es del tipo logarítmica, pero aplicar la fórmula así como la tenemos sería trabar de más. Para evitar esta dura labor, emplearemos las leyes de los logaritmos para simplificar la función: $1)\ln(ab)=\ln a+\ln b,\quad 2)\ln a^{r}=r\ln a,\quad 3)\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

$$y=\ln\frac{x^{4}}{(3x-4)^{2}}=\ln x^{4}-\ln\left(3x-4\right)^{2}=4\ln x-2\ln\left(3x-4\right)$$

De esta forma hemos cambiado una derivada con ciertas dificultades algebraicas, por dos bastante sencillas.

Paso 2. La fórmula a emplear es: $\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

Paso 3. Los componentes son[2]: $u=x$ para la primera y $u=3x-4$ para la segunda.

Paso 4. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=4\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\cancel{dx}^{1}}{\cancel{dx}}\right)-2\left[\frac{1}{3x-4}\cdot\frac{\cancel{d(3x-4)}^{3}}{\cancel{dx}}\right]=\frac{4}{x}-\frac{6}{3x-4}=\frac{4(3x-4)-6x}{x(3x-4)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x-16-6x}{x(3x-4)}=\boxed{\frac{6x-16}{x(3x-4)}}$$

Ejemplo 7. Derivar la función $y=e^{\operatorname{sen}3x}$.

Paso 1. La función es exponencial, y el argumento es una función trigonométrica.

Paso 2. La fórmula a emplear es: $\frac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}$

Paso 3. El componente es: $u=\operatorname{sen}3x$.

Paso 4. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=e^{\operatorname{sen}3x}\cdot\frac{d(\operatorname{sen}3x)}{dx} \qquad \frac{d(\operatorname{sen}u)}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\operatorname{sen}3x}\cdot 3\cos 3x \qquad \frac{d(\operatorname{sen}3x)}{dx}=\cos 3x\cdot\frac{\cancel{d(3x)}^{3}}{\cancel{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{3\cos 3x\cdot e^{\operatorname{sen}3x}} \qquad =3\cos 3x$$

Derivación implícita

Función Implícita: Una ecuación $f(x,y)=0$, define a y como una función implícita de x. El dominio de esa función implícitamente definida consta de tales x para las cuales existe una única "y" tal que $f(x,y)=0$.

Si y en una función definida implícitamente por una ecuación $f(x,y)=0$, la derivada $y'=\frac{dy}{dx}$ puede hallarse de dos formas distintas:

[2] Es importante hacer notar que siempre que $u=x$ entonces $\frac{du}{dx}=1$.

1. Despejar y, y calcular a y' directamente. Salvo para ecuaciones muy sencillas, este método es generalmente imposible o no práctico.
2. Considerar a y como una función de x $\left(y=f(x)\right)$, derivar ambos miembros de la ecuación original $f(x,y)=0$ y despejar y' en la ecuación resultante.

Ejemplo 8. Calcular la derivada de $xy+x-2y-1=0$.

$$\frac{d(xy)}{dx}+\cancelto{1}{\frac{d(x)}{dx}}-2\cancelto{y'}{\frac{d(y)}{dx}}-\cancelto{0}{\frac{d(1)}{dx}}=\cancelto{0}{\frac{d(0)}{dx}}$$

La primera derivada corresponde a un producto de funciones, recordemos que x es la función identidad y $y=f(x)$, con lo que:

$$y\cancelto{1}{\frac{d(x)}{dx}}+x\cancelto{y'}{\frac{d(y)}{dx}}+1-2y'=0$$

$$y+xy'-2y'=-1$$

$$y'(x-2)=-y-1 \qquad \boxed{y'=\frac{-y-1}{x-2}}$$

Ejemplo 9. Calcular la derivada de $x^3+3x^2y-6xy^2+2y^3=0$.

$$\frac{d\left(x^3\right)}{dx}+3\frac{d\left(x^2y\right)}{dx}-6\frac{d\left(xy^2\right)}{dx}+2\frac{d\left(y^3\right)}{dx}=\frac{d(0)}{dx}$$

La primera y la cuarta derivada corresponden a una potencia, con la diferencia que la cuarta nos produce a y', la segunda y la tercera derivada son productos de funciones, por lo que:

$$3x^{3-1}+3\left[y\frac{d\left(x^2\right)}{dx}+x^2\cancelto{y'}{\frac{d(y)}{dx}}\right]-6\left[y^2\cancelto{1}{\frac{d(x)}{dx}}+x\frac{d\left(y^2\right)}{dx}\right]+2\left(3y^{3-1}\cancelto{y'}{\frac{d(y)}{dx}}\right)=\cancelto{0}{\frac{d(0)}{dx}}$$

$$3x^2+3y\left(2x^{2-1}\right)+3x^2y'-6y^2-6x\left(2y^{2-1}\cancelto{y'}{\frac{d(y)}{dx}}\right)+6y^2y'=0$$

$$6xy+3x^2y'-12xyy'+6y^2y'=6y^2-3x^2$$

$$y'\left(3x^2-12xy+6y^2\right)=6y^2-6xy-3x^2$$

$$y'=\frac{6y^2-6xy-3x^2}{3x^2-12xy+6y^2}=\frac{\cancel{3}\left(2y^2-2xy-x^2\right)}{\cancel{3}\left(x^2-4xy+2y^2\right)}$$

$$\boxed{y'=\frac{2y^2-2xy-x^2}{x^2-4xy+2y^2}}$$

BIBLIOGRAFÍA

1) Swokowski E., Cálculo con geometría analítica, Editorial iberoamericana, México, 2002.
2) Stewart J., Cálculo Trascendentes Tempranas, 6 edición, Thomson Brooks/Cole, México, 2008.
3) Leithold L., El Cálculo, Oxford University Press, 7 Edición, México, 1988.
4) Purcell E. J., Varberg D., Rigdon S. E., Cálculo, 9 Edición, Pearson Educación, México, 2007.
5) Swokowski E. y Cole J., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, 11ª edición, International Thomson Editores, México, 2006.
6) Stewart J., Redlin L., Watson S., Precalculus, 5th edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning, USA, 2009.