DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL

La derivada de una función $y = f(x)$ es $\frac{dy}{dx} = \frac{d\left[f(x)\right]}{dx} = f'(x)$, no se debe considerar una fracción común y corriente en la que *dy* es el *numerador* y *dx* es el *denominador*, sino que estrictamente representa $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

dónde: $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$

Sin embargo, en muchos problemas es necesario considerar *dy* y *dx* por separado.

POR DEFINICIÓN:

1. La diferencial de una variable independiente es el incremento que experimenta:

$$\boxed{dx = \Delta x = x_2 - x_1}$$

2. La *diferencial* de una variable dependiente o función es igual al producto de su *derivad*a por *la diferencial de la variable independiente*.

Es decir:

$$\left(\frac{dy}{\cancel{dx}}\right)\cancel{dx} = \left(f'(x)\right)dx$$

Simplificando $\boxed{dy = f'(x)\,dx}$, $dy \neq \Delta y$

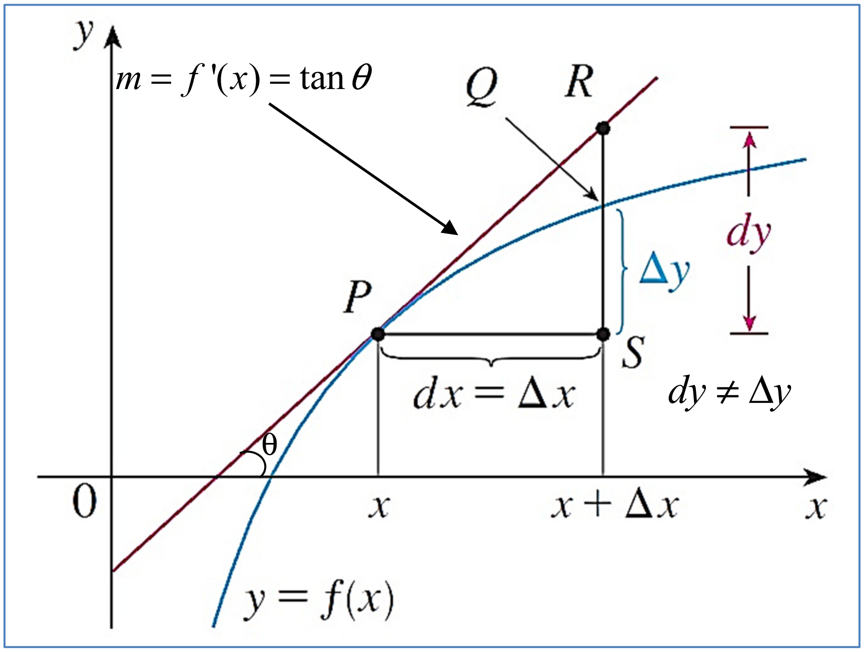
Las fórmulas para hallar las diferenciales son las mismas que se utilizan en la obtención de las derivadas, multiplicadas por *dx*.

Ejemplo: Calcular la derivada y la diferencial de las siguientes funciones:

Función	Derivada	Diferencial
1) $y = x^2 - 5x$	$y' = 2x - 5$	$dy = (2x-5)dx$
2) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3$	$y' = 15x^2 - 8x$	$dy = (15x^2 - 8x)dx$
3) $y = \sqrt{3x-5}$	$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$	$dy = \frac{3\,dx}{2\sqrt{3x-5}}$

INCREMENTOS Y DIFERENCIALES, INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

Dada la curva $y = f(x)$, su derivada en el punto P es, la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en ese punto.



Como $\Delta y = QS$, $dx = PS$ y la $f'(x) = \tan\theta = \frac{RS}{PS}$ y tomando la definición de diferencial tenemos: $dy = f'(x)dx$

$$dy = \tan\theta dx$$

$$dy = \frac{RS}{\cancel{PS}}\cancel{PS}$$

$$\underline{dy = RS \quad \Rightarrow \quad \Delta y \neq dy}$$

dy, representa el incremento correspondiente de la ordenada de la tangente en P.

Observando la gráfica se puede considerar que a medida que la dx se hace pequeña, la diferencia entre Δy y dy se reduce, por lo que cuando $\Delta x \to 0$ o en su defecto es muy pequeño se puede considerar el **aproximar** al Δy con la dy.

CÁLCULO DE APROXIMACIONES USANDO LA DIFERENCIAL

Por la razón anteriormente expuesta, para obtener el valor aproximado del incremento de una función, resulta más sencillo calcular el valor de la diferencial correspondiente y utilizar este valor.

Ejemplo 1. Hallar el incremento del área de un cuadrado de lado 4 *m* al aumentar el lado 3 *mm*

Función: siendo x el lado, $A = x^2$ y $dx = \Delta x = 3mm = 0.003m$

$$\Delta A = dA = 2x\,dx = 2(4)(0.003) = (8)(0.003) = 0.024\ m^2$$

Siendo el valor exacto del incremento de 0.024009 m^2

Corresponde al estudiante comprobar cómo se obtuvo el valor exacto.

Los resultados por los dos métodos son sensiblemente iguales, sin embargo el método de usar *diferenciales* es más sencillo.

Ejemplo 2. Utilizando la *diferencial*, calcular el volumen aproximado del incremento de volumen de un cubo de lado 5 *m* al aumentar el lado en 0.002 *m*

Función: $V = x^3$ (siendo x el lado)

$$\Delta V = dV = 3x^2\,dx = 3(5^2)(0.002) = 3(25)(0.002) = 0.15\ m^3$$

Corresponde al estudiante comprobar el resultado exacto y comparar los resultados.

Ejemplo 3. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{17}$, utilizando a la diferencial.

Función: $y = \sqrt{x}$, entonces $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo que $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Tomando al valor más cercano de $\sqrt{17}$, $\sqrt{16} = 4$.

$\Delta x = 17 - 16 = 1 \approx$ pequeño $\Rightarrow \boxed{\Delta y \approx dy}$

$\Delta y = \sqrt{17} - \sqrt{16} = \sqrt{17} - 4, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{17} = 4 + \Delta y$

$$\Delta y \approx dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Por lo tanto: $\sqrt{17} = 4 + 0.125 = 4.125$

Valor de calculadora: $\sqrt{17} = 4.1231$ lo que genera una diferencia de 0.0019, con lo cual concluimos que la diferencial proporciona una buena aproximación al problema.

LA ANTIDERIVADA

Definición: una función *F* se denomina antiderivada de la función *f* en un intervalo I si:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{Para todo valor de } x \text{ en I.}$$

Ejemplo:

Sea $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$, entonces,

$$F'(x) = 12x^2 + 2x$$

De modo que si *f* es la función definida por:

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

Entonces "f es la derivada de F y F es la antiderivada o función primitiva de f"

Ahora bien, si *G* es la función definida por:

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17 .$$

Entonces *G* también es una antiderivada de *f* ya que:

$$G'(x) = 12x^2 + 2x$$

En general: cualquier función determinada por $4x^3 + x^2 + C$, donde *C* es una constante, es una antiderivada de *f*.

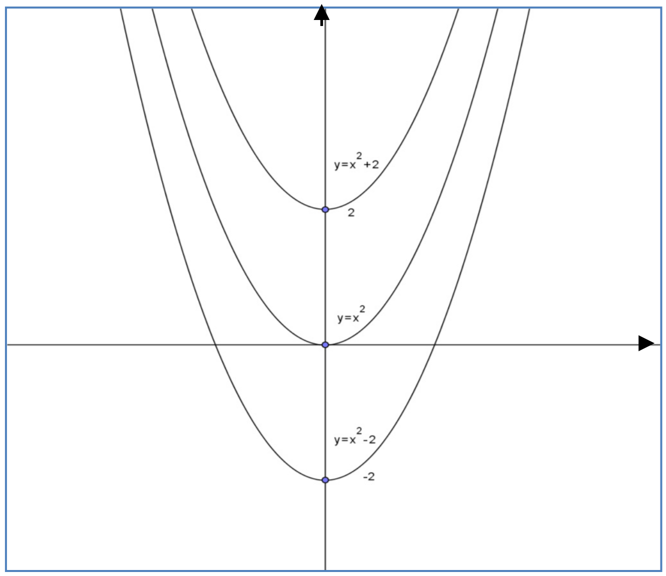
Teorema:

Si *F* es una antiderivada particular de *f* en un intervalo I, entonces cada antiderivada de *f* en I está dada por: $F(x) + C$

Donde *C* es una constante arbitraria, y todas las antiderivadas de *f* en I pueden obtenerse a partir de $F(x) + C$, asignando valores particulares a *C*.

Por comodidad, este concepto se expresa con la frase *"F(x) es una antiderivada de f(x)"*.

$F(x) + C$, representa a una familia de curvas, por ejemplo para la antiderivada $x^2 + C$, se presentan las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$, lo cual nos indica que se tendrían infinitas graficas de esta antiderivada, como se ilustra en la siguiente figura:



LA INTEGRAL INDEFINIDA

La antidiferenciación, es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada, es decir, es el proceso de encontrar la antiderivada más general de una función dada.

El símbolo $\int$ denota la operación de antiderivación, la cual se escribe como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Dónde: $f(x)$ = Integrando.
dx = Diferencial de la variable independiente.
x = Variable de integración.
$F(x)$ = Función primitiva.
C = Constante de integración.
$F(x)+C$ = Antiderivada general de f.

Las expresiones integral indefinida y función primitiva son sinónimos de la palabra antiderivada.

Como la antidiferenciación es el inverso de la operación de diferenciación, podemos obtener fórmulas de integración a partir de fórmulas de diferenciación, por ejemplo:

$$\left(\frac{d(\cos u)}{dx} = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}\right) \bullet dx \quad \Rightarrow \quad d(\cos u) = -\operatorname{sen} u du \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} u du = -d(\cos u)$$

$$\int \operatorname{sen} u du = -\cancel{\int} \cancel{d}(\cos u) \quad \Rightarrow \quad \int \operatorname{sen} u du = -\cos u$$

El siguiente formulario será de utilidad en la resolución de integrales indefinidas:

FORMULAS DE INTEGRACIÓN INMEDIATA O DIRECTAS

***a*, *C* y *n* = constantes.**
u, v y w son función de *x*.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) = \int \mathbf{u} + \int \mathbf{v} - \int \mathbf{w} + C$

3. $\int a\,\mathbf{u}\,d\,\mathbf{u} = a\int \mathbf{u}\,d\,\mathbf{u} + C$

4. $\int \mathbf{u}^n d\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}} = \mathbf{ln}|\mathbf{u}| + C$

6. $\int a^{\mathbf{u}} d\,\mathbf{u} = \dfrac{a^{\mathbf{u}}}{\mathbf{ln}\,a} + C \quad ; \quad a > 0, a \neq 1$

7. $\int \mathbf{e}^{\mathbf{u}}\, d\,\mathbf{u} = \mathbf{e}^{\mathbf{u}} + C$

8. $\int \mathbf{sen\,u}\,d\,\mathbf{u} = -\mathbf{cos\,u} + C$

9. $\int \mathbf{cos\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{senu} + C$

10. $\int \mathbf{tan\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{ln}|\mathbf{sec\,u}| + C$

11. $\int \mathbf{cot\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{ln}|\mathbf{sen\,u}| + C$

12. $\int \mathbf{sec\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{ln}|\mathbf{sec\,u} + \mathbf{tan\,u}| + C$

13. $\int \mathbf{csc\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{ln}|\mathbf{csc\,u} - \mathbf{cot\,u}| + C$

14. $\int \mathbf{sec}^2\,\mathbf{u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{tan\,u} + C$

15. $\int \mathbf{csc}^2\,\mathbf{u}\,d\,\mathbf{u} = -\mathbf{cot\,u} + C$

16. $\int \mathbf{sec\,u\,tan\,u}\,d\,\mathbf{u} = \mathbf{sec\,u} + C$

17. $\int \mathbf{cscu\,cot\,u}\,d\,\mathbf{u} = -\mathbf{csc\,u} + C$

18. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\sqrt{a^2 - \mathbf{u}^2}} = \mathbf{arcsen}\dfrac{\mathbf{u}}{a} + C$

19. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{a^2 + \mathbf{u}^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathbf{arctan}\dfrac{\mathbf{u}}{a} + C$

20. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}\sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\,\mathbf{arc\,sec}\dfrac{\mathbf{u}}{a} + C$

21. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\,\mathbf{ln}\left|\dfrac{\mathbf{u} - a}{\mathbf{u} + a}\right| + C$

22. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{a^2 - \mathbf{u}^2} = \dfrac{1}{2a}\,\mathbf{ln}\left|\dfrac{a + \mathbf{u}}{a - \mathbf{u}}\right| + C$

23. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^2 + a^2}} = \mathbf{ln}\left(\mathbf{u} + \sqrt{\mathbf{u}^2 + a^2}\right) + C$

24. $\int \dfrac{d\,\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2}} = \mathbf{ln}\left|\mathbf{u} + \sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2}\right| + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - \mathbf{u}^2}\,d\,\mathbf{u} = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}\sqrt{a^2 - \mathbf{u}^2} + \dfrac{1}{2}a^2\,\mathbf{arcsen}\dfrac{\mathbf{u}}{a} + C$

26. $\int \sqrt{a^2 + \mathbf{u}^2}\,d\,\mathbf{u} = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}\sqrt{a^2 + \mathbf{u}^2} + \dfrac{1}{2}a^2\,\mathbf{ln}\left(\mathbf{u} + \sqrt{a^2 + \mathbf{u}^2}\right) + C$

27. $\int \sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2}\,d\,\mathbf{u} = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}\sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2} - \dfrac{1}{2}a^2\,\mathbf{ln}\left|\mathbf{u} + \sqrt{\mathbf{u}^2 - a^2}\right| + C$

INTEGRALES INMEDIATAS

Las integrales que podemos obtener como resultado de aplicar de una manera directa fórmulas, reciben el nombre *de integrales inmediatas*. En algunos casos, antes de aplicar la fórmula que corresponda, es necesario hacer algunas transformaciones algebraicas sencillas las cuales se pueden llevar a cabo mediante **los conceptos básicos de integración**:

1. La integral de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones.

$$\int (u+v-w)=\int u+\int v-\int w$$

$$\int \left(5x^2+7x-2\right)dx=\int 5x^2dx+\int 7xdx-\int 2dx$$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral d la función. Si a es una constante y esta como un factor del integrando.

$$\int audu=a\int udu$$

$$\int \left(5x^2+7x-2\right)dx=\int 5x^2dx+\int 7xdx-\int 2dx=5\int x^2dx+7\int xdx-2\int dx$$

3. Dentro del signo de integración se pueden conmutar los factores del integrando.

$$\int x\left(x^2-1\right)^3dx=\int \left(x^2-1\right)^3xdx$$

4. Por ningún motivo se puede sacar la variable de integración del signo de integración.

$$\int x\left(x^2-1\right)^3dx\neq x\int \left(x^2-1\right)^3dx$$

5. En algunos casos la integración se facilita si se efectúan previamente las operaciones indicadas (productos y cocientes de polinomios).

$$\int (2x+1)(x-3)dx=\int \left(2x^2-5x-3\right)dx$$

$$\int \frac{x^3-1}{x-2}dx=\int \left(x^2+2x+4+\frac{7}{x-2}\right)dx$$

6. Otras integrales se pueden resolver al sumar el neutro aditivo al integrando:

$$0=1-1=2-2=3-3=\cdots=etc-etc$$

$$\int \frac{xdx}{(x+5)^2} = \int \frac{(x+\overbrace{5-5}^{0})}{(x+5)^2}dx = \int \frac{[(x+5)-5]}{(x+5)^2}dx = \int \left\{ \frac{x+5}{(x+5)^2} - \frac{5}{(x+5)^2} \right\} dx$$

$$\int \frac{\cancel{x+5}}{(x+5)\cancel{^2}} dx - 5\int \frac{dx}{(x+5)^2} = \int \frac{dx}{x+5} - 5\int (x+5)^{-2} dx$$

Ejemplos:

		Fórmula
1	$\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$	4
2	$\int x^5\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$	4
3	$\int 5x^3\, dx = 5\int x^3\, dx = 5\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) = \frac{5x^4}{4} + C$	3 y 4
4	$\int \frac{-3dx}{x^3} = -3\int x^{-3}\, dx = -3\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) = \frac{-3x^{-2}}{-2} = \frac{3}{2x^2} + C$	3 y 4
5	$\int (3x^2+5x-2)dx = 3\int x^2 dx + 5\int xdx - 2\int dx = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 5\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) - 2x = \cancel{3}\left(\frac{x^3}{\cancel{3}}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2x = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C$	1,2,3 y 4
6	$\int \frac{x^2-4x+3}{x}dx = \int \frac{x^2}{x}dx - 4\int \frac{x}{x}dx + 3\int \frac{dx}{x} = \int x\, dx - 4\int dx + 3\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln x + C$	1,2,3,4 y 5
7	$\int (2x^2-3x+1)dx = 2\int x^2 dx - 3\int xdx + \int dx = 2\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) - 3\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + (x) = 2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$	1,2,3 y 4

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

El propósito de este método es identificar en el integrando una función $u = f(x)$ que este multiplicada por su diferencial du, y así poder aplicar una fórmula de integración inmediata.

En este método se escoge una literal, que es u la cual se iguala a la función que incluye el integrando, regularmente u es la función que se encuentra dentro de una potencia, un radical, en el denominador o como el argumento de una función trascendente:

$$\boxed{u^n,\ \sqrt[n]{u},\ \frac{a}{u},\ \cos u,\ \arctan u,\ e^u,\ \ln u,\ \text{etc.}}$$

Ejemplos:

1. $\int (3x-5)^2\,dx =$, se procede así : si $u = 3x-5$, entonces $du = 3dx$, entonces

$\int u^2 dx$, y notamos que al integrando le falta un 3, por lo que multiplicamos por el neutro multiplicativo: $1 = \frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} = \frac{2}{2} = \frac{10}{10} = \frac{etc}{etc}$ de donde elegimos $1 = \frac{3}{3} = \frac{1(3)}{3}$

$$\frac{1}{3}\int u^2 \underbrace{3dx} = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{2+1}}{2+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3}\right] = \frac{1}{9}u^3 = \frac{1}{9}(3x-5)^3 + C$$

2. $\int 10\left(5x^2+3\right)^4 x\,dx =$, se puede razonar así : si $u = 5x^2+3$, entonces $du = 10xdx$, de donde observamos que solo debemos reordenar el integrando:

$$\int u^4 \underbrace{10xdx} = \int u^4 du = \frac{u^{4+1}}{4+1} = \frac{u^5}{5} = \frac{\left(5x^2+3\right)^5}{5} + C$$

3. $\int e^{2x+5} dx =$, refiriéndonos a la fórmula 7 se puede proceder así, si $u = 2x+5$, entonces $du = 2dx$, de donde notamos que el neutro que necesitamos es $1 = \frac{2}{2} = \frac{1(2)}{2}$

$$\frac{1}{2}\int e^u \underbrace{2dx} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}\left(e^u\right) = \frac{1}{2}e^{2x+5} + C$$

4. $\int x\,sen\left(-3x^2\right)dx=$, refiriéndonos a la fórmula 8 se puede razonar así :

si $u=-3x^2$, entonces $du=-6xdx$, de donde el uno que necesitamos para tener a du es:

$$1=\frac{-6}{-6}=\frac{1(-6)}{-6}$$

$$=-\frac{1}{6}\int \operatorname{sen} u\cdot(-6)\,x\,dx=-\frac{1}{6}\int \operatorname{sen} u\,du=-\frac{1}{6}(-\cos u)+C=\frac{1}{6}\cos u=\frac{1}{6}\cos\left(-3x^2\right)+C$$

5. $\int\left(6x^2-4\right)\sec^2\left(2x^3-4x\right)dx=$, refiriéndonos a la fórmula 14 se puede cambiar la variable así:

si $u=2x^3-4x$, entonces $du=\left(6x^2-4\right)dx$, lo único que debemos hacer es reacomodar el integrando:

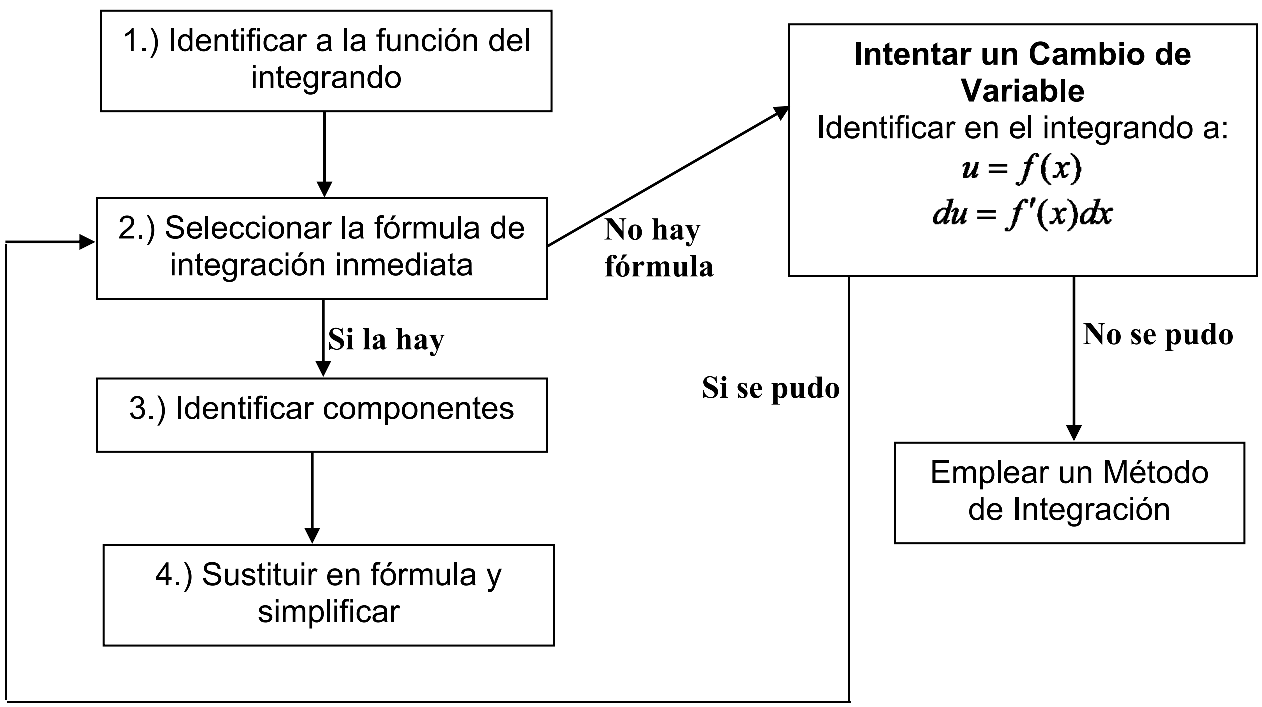
$$\int \sec^2 u\,\left(6x^2-4\right)dx=\int \sec^2 u\;du=\tan u=\tan\left(2x^3-4x\right)+C$$

BIBLIOGRAFIA

1) Swokowski E., Cálculo con geometría analítica, Editorial iberoamericana, México, 2002.
2) Stewart J., Cálculo Trascendentes Tempranas, 6 edición, Thomson Brooks/Cole, México, 2008.
3) Leithold L., El Cálculo, Oxford University Press, 7 Edición, México, 1988.
4) Purcell E. J., Varberg D., Rigdon S. E., Cálculo, 9 Edición, Pearson Educación, México, 2007.
5) Swokowski E. y Cole J., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, 11ª edición, International Thomson Editores, México, 2006.
6) Stewart J., Redlin L., Watson S., Precalculus, 5th edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning, USA, 2009.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

A estas alturas ya somos capaces de calcular cualquier integral de manera inmediata o por medio de un cambio de variable, como conclusión de la anterior unidad podemos sugerir el siguiente procedimiento para resolver integrales indefinidas:



Cuando una integral no se puede resolver de manera inmediata o por el método de sustitución por cambio de variable, se emplea algún método de integración más complejo. En esta unidad solo veremos 4 métodos:

- Método de integración por partes
- Método para funciones trigonométricas
- Método de sustitución trigonométrica
- Método de fracciones parciales

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean: $u = f(x)$ y $v = g(x)$

El producto de estas funciones queda definido como:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = uv$$

Si consideramos a $u = e^x$ y $v = \cos x$, entonces $uv = e^x \cos x$.

Si este producto lo incluimos dentro de una integral, tenemos:

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Aplicando el diagrama de flujo de la página anterior, vemos que la integral no se puede resolver con alguna de las 27 fórmulas de integración inmediata de nuestro formulario. Al intentar un cambio de variable, éste resulta imposible por lo que de acuerdo al procedimiento debemos emplear algún Método de integración.

Toda regla de diferenciación tiene una regla de integración correspondiente, por ejemplo, a la regla de la cadena en la derivación le corresponde la regla de integración por el método de sustitución por cambio de variable.

Para el método de integración por partes, la regla que le corresponde es la de la derivación de un producto de funciones:

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Convirtiendo la anterior regla a su forma diferencial

$$d(uv) = vdu + udv$$

Integrando ambos miembros de la ecuación

$$\cancel{\int d}(uv) = \int vdu + \int udv$$

Aplicando la propiedad de la igualdad

$$\int udv + \int vdu = uv$$

Despejando el primer término del lado izquierdo de la ecuación

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

A esta ecuación se le denomina **fórmula de integración por partes.**

La finalidad de emplear este método de integración es la de resolver una o más integrales sencillas o de igual complejidad que la integral original.

El método consiste en descomponer el integrando en u y dv, lo que significa un doble cambio de variable. En general, en la elección de u y dv trataremos de definir a $u = f(x)$ como la función más sencilla de diferenciar, o al menos que no sea la más complicada, siempre y cuando $dv = g'(x)dx$ se pueda integrar con facilidad para obtener v.

El Método de Integración por Partes se recomienda cuando en el integrando tenemos un producto de funciones o funciones logarítmicas o funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo 1. Determinar $\int x\,sen\,x\,dx$

Para resolver la integral, se emplea la fórmula de integración por parte:

$$\boxed{\int x\;sen\,x\;dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + sen\,x + C$$

$u = x \qquad dv = sen\,x\;dx$

$du = dx \qquad v = \int sen\,x\,dx = -\cos x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Variantes del método

Ejemplo 2. La integración por partes se puede realizar las veces que sean necesarias en un mismo ejercicio.

Nuevamente por partes

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2xdx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]$$

$u = x^2 \qquad dv = e^x dx \qquad\qquad u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = 2xdx \qquad v = \int e^x dx = e^x \qquad\qquad du = dx \qquad v = e^x$

Finalmente $$\boxed{\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$$

Ejemplo 3. La fórmula de integración por partes, se puede manipular con los axiomas de las ecuaciones lineales.

Nuevamente por partes

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-sen\,x\,dx) = e^x \cos x + \int e^x sen\,x\,dx$$

$u = \cos x \qquad dv = e^x dx \qquad\qquad u = sen\,x \qquad dv = e^x dx$

$du = -sen\,xdx \qquad v = \int e^x dx = e^x \qquad\qquad du = \cos xdx \qquad v = e^x$

Es la integral original

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \left[e^x sen x - \int e^x \cos x\,dx\right] = e^x \cos x + e^x sen x - \int e^x \cos x\,dx$$

Sumando en ambos miembros de la ecuación la integral $\int e^x \cos x dx$ tenemos:

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x sen x$$

Finalmente dividiendo por 2 ambos lados de la ecuación: $\boxed{\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x sen x}{2} + C}$.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Este método hace uso de las identidades trigonométricas, sobre todo las pitagóricas y las de ángulo doble. El objetivo es convertir a integrales trigonométricas complicadas en otras más sencillas que pueden ser resueltas por métodos directos o por cambio de variable, mediante el uso de identidades trigonométricas. Este método resuelve los siguientes tipos de integrales y sus variantes:

$A)\ \int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\ du$

Caso I.- Si m y n son pares y positivos o alguno de ellos es nulo, utilizar:

$$sen^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

Caso II.- Si m o n son impares y positivos:

a) Si m es impar, se factoriza $sen\, u\ du$ y se aplica: $sen^2 u = 1-\cos^2 u$.

b) Si n es impar, se factoriza $\cos u\ du$ y se aplica: $\cos^2 u = 1 - sen^2 u$.

$B)\ \int \tan^m u \sec^n u\ du$

Caso I.- Si m es impar y positiva, se factoriza:

$\sec u \cdot \tan u\ du$ y se aplica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$

Caso II.- Si n es par y positiva se factoriza:

$\sec^2 u\ du$ y se aplica $\sec^2 u = \tan^2 u + 1$

Caso III.- Si m es par y n es impar, emplear el método de Integración por Partes.

$C)\ \int \cot^m u \csc^n u\ du$

Caso I.- Si se factoriza $\cot u\ du$ o $\cot^2 u\ du$, se aplica: $\cot^2 u = \csc^2 u - 1$

Caso II.- Si se factoriza $\csc^2 u\ du$, se aplica: $\csc^2 u = \cot^2 u + 1$,
este caso solo aplica cuando n es par.

Ejemplo 1. Calcular la siguiente integral trigonométrica: $\int \cos^5 x dx$

Esta integral pertenece al tipo A, y los exponentes son $m = 0$ y $n = 5$, por lo que emplearemos el caso 2 inciso b.

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x dx = \int \left(1-u^2\right)^2 \cos x dx = \int \left(1-2u^2+u^4\right) du$$

$$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x\ dx$$

$$= \int du - 2\int u^2 du + \int u^4 du = u - 2\left(\frac{u^{2+1}}{2+1}\right) + \left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right) = u - 2\left(\frac{u^3}{3}\right) + \frac{u^5}{5} = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

Ejemplo 2. Calcular la siguiente integral trigonométrica: $\int sen^2 x \cos^2 x \, dx$

Esta integral es del tipo A y pertenece al Caso I, $m = n = 2$ = par

$$\int sen^2 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

La segunda integral pertenece al mismo Caso I y se vuelve a sustituir la función cuadrática:

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$

$$u = 4x$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \cos u\ dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int \cos u\ 4dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos u\, du =$$

$$du = 4dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}(\operatorname{sen} u) = \underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C}\Big|$$

Ejemplo 3. Calcular la siguiente integral: $\int \sec^4 x dx$

Esta integral pertenece al tipo B y caso II

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \left(\tan^2 x + 1\right)\sec^2 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx =$$

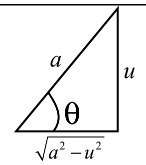
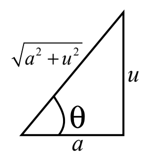
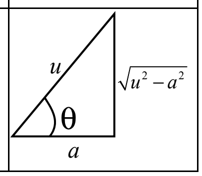
$$u = \tan x$$

$$= \int u^2 \sec^2 x dx + \tan x = \int u^2 du + \tan x = \frac{u^3}{3} + \tan x = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

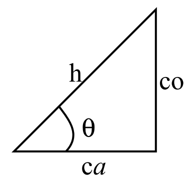
$$du = \sec^2 x dx$$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Este método se sugiere para integrales que contengan en su integrando alguna variante del Teorema de Pitágoras. El objetivo de este método de integración es transformar a integrales algebraicas que contengan en su integrando a expresiones como $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$ y $\sqrt{u^2-a^2}$, donde $a>0$, en una integral trigonométrica de una nueva variable de la siguiente forma:

Para	Sustituir con	Tomar a *u* como	Triángulo
$\sqrt{a^2-u^2}$	$a\cos\theta$	$u=a\,\text{sen}\,\theta$	
$\sqrt{a^2+u^2}$	$a\sec\theta$	$u=a\tan\theta$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$a\tan\theta$	$u=a\sec\theta$	

$h^2 = co^2+ca^2$



$$sen\ \theta=\frac{co}{h}\qquad \csc\theta=\frac{h}{co}$$
$$\cos\theta=\frac{ca}{h}\qquad \sec\theta=\frac{h}{ca}$$
$$\tan\theta=\frac{co}{ca}\qquad \cot\theta=\frac{ca}{co}$$

Ejemplo. Resuelve la siguiente integral indefinida: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

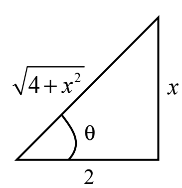
Para este ejercicio, si intentáramos resolverlo por un cambio de variable veríamos que es imposible, no obstante como tiene una expresión con radical similar a la segunda de la tabla, aplicamos este método de integración.

Por medio de analogías obtenemos los valores de *a* y *u,* y construimos el triángulo rectángulo que nos servirá para finalizar el ejercicio:

$$a^2=4\Rightarrow a=2,\quad u^2=x^2\Rightarrow u=x$$

$$\sqrt{a^2+u^2}=a\sec\theta\Rightarrow\sqrt{4+x^2}=2\sec\theta\Rightarrow\sec\theta=\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}=\frac{h}{ca}$$

$$u=a\tan\ \theta\Rightarrow x=2\tan\theta\Rightarrow \underline{dx=2\sec^2\theta d\theta}\Big|\Rightarrow\tan\theta=\frac{x}{2}=\frac{co}{ca}$$



$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{2\sec^2\theta d\theta}{(2\tan\theta)^2\,2\sec\theta}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta d\theta}{\tan^2\theta}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta}{\left(\frac{sen\ \theta}{\cos\theta}\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta d\theta}{sen^2\theta}=$$

$$\frac{1}{4}\int\text{sen}^{-2}\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{4}\int v^{-2}\cos\theta d\theta=\frac{1}{4}\int v^{-2}dv=\frac{1}{4}\left(\frac{v^{-2+1}}{-2+1}\right)=-\frac{1}{4v}=-\frac{1}{4\,\text{sen}\,\theta}=-\frac{1}{4}\csc\theta$$

$$v=\text{sen}\,\theta\qquad dv=\cos\theta d\theta$$

Hasta aquí correspondería a la solución trigonométrica, pero como la función original es algebraica debemos de cambiar la variable x nuevamente con la ayuda del triángulo:

$$\csc\theta = \frac{h}{co} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right) = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C}$$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

El objetivo de este método de integración es resolver integrales algebraicas que contengan en su integrando la división de polinomios. Este método solo se aplica a integrandos que contengan fracciones racionales propias.

Definición: se llama función racional a aquella, en la que el numerador y el denominador son expresiones en donde la variable solo tiene exponentes enteros y positivos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ Donde *f(x)*= función racional, *p(x) y q(x)* son polinomios.

Si el grado de *p(x)* es **menor** al grado de *q(x)*, entonces *f(x)* es una fracción racional propia, en cualquier otro caso es impropia.

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{grado\ 1}{grado\ 3} \Rightarrow \text{ fracción racional propia}$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-2} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{grado\ 3}{grado\ 1} \Rightarrow \text{ fracción racional impropia}$$

En caso de tener un integrando que sea una fracción racional impropia, se realiza la división larga antes de resolver la integral:

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-2} = x^2+2x+4+\frac{7}{x-2}$$

Si el integrando es una fracción racional propia, se emplea alguno de los casos siguientes:

Caso I: Todos los factores lineales del denominador son distintos.
A cada factor lineal $ax+b$ que este una sola vez en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una sola fracción simple de la forma

$\frac{A}{ax+b}$, donde A es una contante cuyo valor se tendrá que calcular.

Caso II: Algunos de los factores lineales del denominador se repiten.
En este caso el factor repetido $(ax+b)^n$ se transforma en las siguientes fracciones simples:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Caso III: Algunos de los factores del denominador son cuadráticos irreducibles, de la forma $ax^2+bx+c,$ donde $b^2-4ac<0,$ entonces dicho factor genera una fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Caso IV: Algunos de los factores del denominador son cuadráticos irreducibles "repetidos" de la forma $\left(ax^2+bx+c\right)^n$, donde $b^2-4ac<0$, se transforma en las siguientes fracciones simples:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

Ejemplo 1. Calcular la siguiente integral indefinida: $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Al intentar realizar un cambio de variable nos encontraríamos con la imposibilidad de hacerlo, por lo que recurriríamos al método de fracciones parciales, ya que tenemos una división de polinomios en el integrando.

PROCEDIMIENTO

Paso 1. Determinar si el integrando es una fracción racional propia o impropia.

$$f(x)=\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{grado\ 1}{grado\ 3}\Rightarrow \text{ fracción racional propia}$$

Paso 2. Factorizar el denominador.

$$x^3-x^2-2x=x\left(x^2-x-2\right)=x(x-2)(x+1)$$

Paso 3. Identificar el caso al que pertenece la factorización. Para este ejemplo es Caso I:

$$\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\Longrightarrow\int\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\right)dx$$

Paso 4. Obtener los valores de las constantes de las fracciones simples del Paso 3.

Multiplicando ambos lados de la fracción por $x(x-2)(x+1)$ obtenemos:

$$3x-2\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

$$3x-2\equiv Ax^2-Ax-2A+Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx$$

factorizando con respecto a las x's

$$0x^2+3x-2\equiv\left(A+B+C\right)x^2+\left(-A+B-2C\right)x-2A$$

Las flechas nos indican equivalencias entre coeficientes, lo cual nos lleva a la generación de un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+B+C&=0.........(1)\\ -A+B-2C&=3.........(2)\\ -2A&=-2.........(3)\end{aligned} \qquad \text{resolviendo: } A=1,\ B=\frac{2}{3}\ y\ C=-\frac{5}{3}$$

Paso 5. Resolver las integrales resultantes del Paso 3.

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\boxed{\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\ln x+\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{5}{3}\ln|x+1|+C}$$

BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

1) Fuenlabrada, Samuel. Cálculo Integral, México, McGraw Hill, 2004.
2) Granville W. A. Cálculo diferencial e integral, México, Limusa, 2000.
3) Leithold L. El cálculo, México, Oxford University Press, 1998.
4) Purcell J. E., Varberg D. y Rigdon S. E. Cálculo, México, Pearson Educación, 2001.
5) Stewart J. Cálculo, Trascendentes tempranas, México, Thomson Learning, 2002.
6) Swokowski, Earl W. Calculo con geometría analítica, México, G.E. Iberoamérica, 1989.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

INTRODUCCIÓN

El cálculo consta de dos partes principales, el *cálculo diferencial* que está basado en la *derivada* y el *cálculo integral*, cuya base es la *integral definida*. Con la integral definida estaremos calculando el área bajo una curva o entre curvas. Para evaluar una integral definida es absolutamente necesario haber entendido y dominado las fórmulas de integración así como los métodos de integración.

La integración es un concepto fundamental de las matemáticas avanzadas, especialmente en los campos del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños. El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

LA INTEGRAL DEFINIDA

Suma de Riemann como antecedente de la integral definida

La notación sigma se define por la siguiente expresión:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

donde

$\Sigma \rightarrow$ es el operador suma

$m \rightarrow$ es el límite inferior de la suma

$n \rightarrow$ es el límite superior de la suma

$i \rightarrow$ es el índice de la suma, también puede ser $j,\ k,\ l,$ etc.

$f \rightarrow$ es una expresión que contenga al índice i.

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{i=-2}^{2} (3i+2) = (3(-2)+2) + (3(-1)+2) + (3(0)+2) + (3(1)+2) + (3(2)+2) =$$

$$= -4 - 1 + 2 + 5 + 8 = 10$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

$$\sum_{k=3}^{8}\frac{1}{k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{341}{280}$$

Propiedades de la notación Sigma

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$, c = cualquier constante.

$$\sum_{i=1}^{4} c = c+c+c+c=4c$$

2) $\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(i) = c\sum_{i=1}^{n} f(i)$

$$\sum_{i=1}^{4} 5F(i)=5F(1)+5F(2)+5F(3)+5F(4)=$$

$$=5\left[F(1)+F(2)+F(3)+F(4)\right]=5\sum_{i=1}^{4}F(i)$$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left[F(i)+G(i)\right]=\sum_{i=1}^{n}F(i)+\sum_{i=1}^{n}G(i)$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(x^i+y^i\right)=(x+y)+\left(x^2+y^2\right)+\left(x^3+y^3\right)=$$

$$=\left(x+x^2+x^3\right)+\left(y+y^2+y^3\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(x^i\right)+\sum_{i=1}^{3}\left(y^i\right)$$

Estas son algunas fórmulas importantes empleadas en la notación Sigma

$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ Suma de los *n*-primeros números naturales

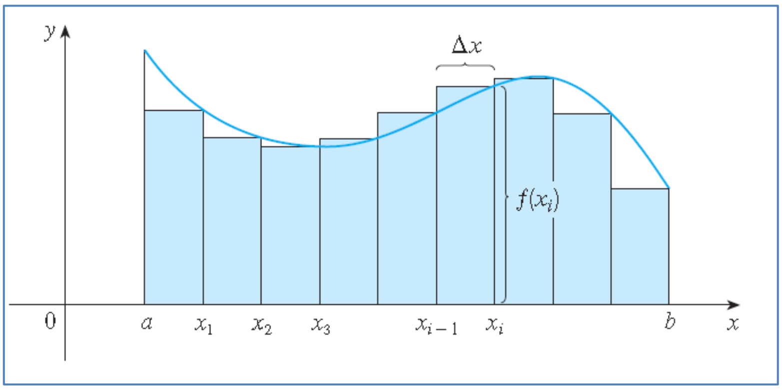
$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Suma de los cuadrados de los *n*-primeros números naturales

$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ Suma de los cubos de los *n*-primeros números naturales

$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ Suma de los términos a la cuarta de los *n*-primeros números naturales

Suma de Riemann con notación Sigma

Definición: Supongamos que la función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,b]$, y que ***R*** es la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x=a$ y $x=b$. Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y denotamos el i–ésimo subintervalo por (x_{i-1}, x_i).



Entonces si $f(x_i)$ es el valor de la función en el i–ésimo subintervalo, la medida del área de la región ***R*** está dada por:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Como $n \to \infty$ y de la formula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ se deduce que él $\Delta x \to 0$. Por lo tanto manejando este límite en términos del Δx tenemos:

$$A = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

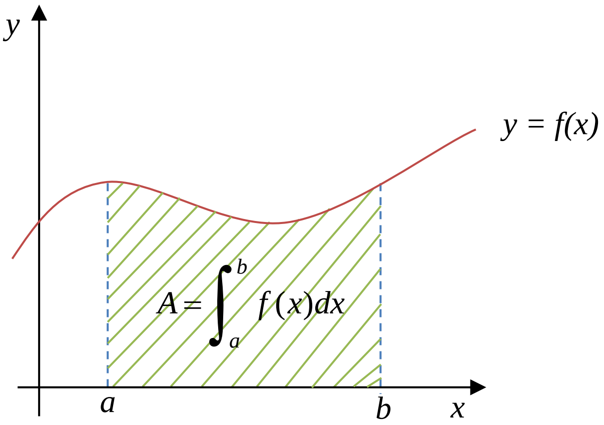
DEFINICIÓN: ***LA INTEGRAL DEFINIDA*** calculada entre dos extremos de un intervalo cerrado $[a,b]$, es el incremento de la antiderivada $(\Delta F = F(b) - F(a))$, propuesta cuando la variable pasa de un valor inicial hacia un valor final.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde: a es el límite inferior $\quad F(a)$ es la antiderivada evaluada en el límite inferior

b es el límite superior $\quad F(b)$ es la antiderivada evaluada en el límite superior

La integral definida representa el área de la superficie limitada por la curva de la función $y = f(x)$ cuyos extremos tienen como abscisas a $x = a$ y a $x = b$.



El resultado de una *integral definida* se expresa siempre en *unidades cuadradas* de superficie.

El procedimiento para calcular una integral definida, comprende los siguientes pasos:

1. Integrar la expresión diferencial dada.
2. Evaluar la antiderivada en el límite superior b y restarle el valor de la antiderivada evaluada en el límite inferior a.

Nota: No es necesario tomar en cuenta la constante de integración (*C)* pues siempre se cancela en la resta.

Observemos algunos ejemplos:

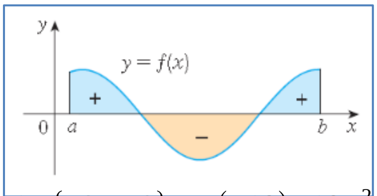
$$\int_2^4 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4}\right] = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = 60u^2$$

como se mencionó con anterioridad, la constante de integración desaparece.

$$\int_1^4 3x\;dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^4 = \left[\frac{3(4)^2}{2} - \frac{3(1)^2}{2}\right] = \frac{48}{2} - \frac{3}{2} = \frac{45}{2} = 22.5u^2$$

$$\int_1^3 \left(x^2 - 5x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2}\right] - \left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{5(1)^2}{2}\right] = -\frac{27}{2} - \left(-\frac{13}{6}\right) = -\frac{34}{3}u^2$$

El signo negativo, nos indica que el área calculada está por debajo del eje “*x*” o al menos la mayoría de ésta.



$$\int_{-3}^{-1} \left(3x^2 + 2x\right)dx = \left[x^3 + x^2\right]_{-3}^{-1} = \left[(-1)^3 + (-1)^2 - \left\{(-3)^3 + (-3)^2\right\}\right] = -1 + 1 - \{-27 + 9\} = -(-18) = 18u^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [sen\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\tfrac{\pi}{2} - sen\,0 = 1 - 0 = 1u^2$$

$$\int_2^8 \frac{dx}{x} = [ln\,x]_2^8 = ln\,8 - ln\,2 = 2.08 - 0.69 = 1.39u^2$$

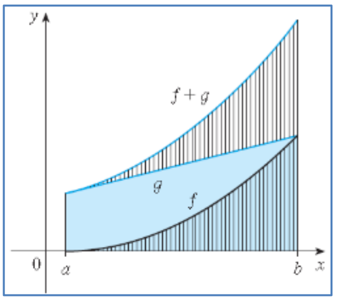
Propiedades de la Integral Definida

1) Si la función *f* es integrable en el intervalo $[a,b]$ y si *k* es cualquier constante, entonces;

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$$

2) Si *f* y *g* son integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y:

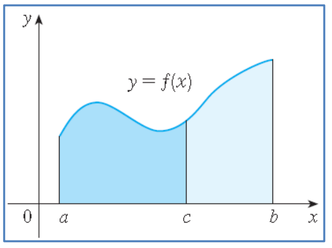
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$



3) Si *f* es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números *a, b* y *c* entonces:

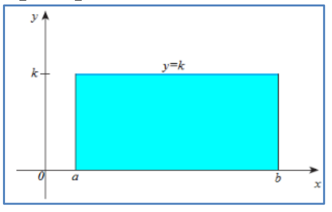
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Sin importar cuál sea el orden de *a, b* y *c*.



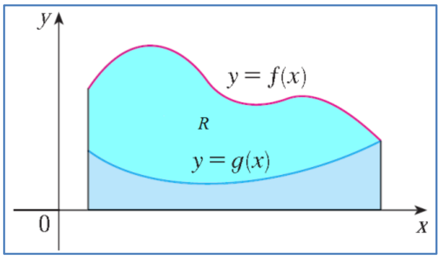
4) Si *k* es una constante y si *f* es una función tal que $f(x)=k$, para toda *x* en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx = k(b-a) \qquad f(x) = k.$$



5) Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $f(x) \geq g(x),\ \forall x$ en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g\ (x)\, dx$$



EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El nombre al teorema está bien aplicado, ya que dicho teorema establece la conexión entre las dos ramas del cálculo.
El teorema fundamental del cálculo proporciona la relación inversa precisa entre la derivada y la integral.

1ª parte

Si f es continua en $[a,b]$, la función G está definida por

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad\qquad a\le x\le b$$

Es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y $G'(x)=f(x)$, en otras palabras:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$ [1]

2ª parte

Si f es continua en $[a,b]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)}$$

En donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, $F'=f$. $F(x)=\int f(x)\,dx$

BIBLIOGRAFIA

1) Swokowski E., Cálculo con geometría analítica, Editorial iberoamericana, México, 2002.
2) Stewart J., Cálculo Trascendentes Tempranas, 6 edición, Thomson Brooks/Cole, México, 2008.
3) Leithold L., El Cálculo, Oxford University Press, 7 Edición, México, 1988.
4) Purcell E. J., Varberg D., Rigdon S. E., Cálculo, 9 Edición, Pearson Educación, México, 2007.
5) Swokowski E. y Cole J., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, 11ª edición, International Thomson Editores, México, 2006.
6) Stewart J., Redlin L., Watson S., Precalculus, 5th edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning, USA, 2009.

[1] Una variante de este teorema es: $\int_a^x \frac{d}{dt}\left[f(t)\right]dt = f(x)+C$, de la Bibliografía 1 Swokowski.