PLAN DE TRABAJO

NOMBRE DEL PROFESOR: ING. BERNARDINO SÁNCHEZ DÍAZ, LIC. MATEMÁTICAS LUIS ORTEGA GALLEGOS Y ING. ERIK G. SANTIAGO P.
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS
FECHA DE INICIO 16/02/15 FECHA DE TERMINO 19/06/15

I. **PROPÓSITO GENERAL DEL CURSO:** El alumno aplicará los conceptos básicos de Matemáticas en el tratamiento de problemáticas sociales, políticas, económicas y de la ciencia y la tecnología. También aplicará estos en su formación integral, los cuales posibiliten su ingreso y permanencia en el nivel superior o en la planta laboral.

II. **CONTRIBUCIÓN DE LA MATERIA AL PERFIL DE EGRESO:** Al terminar esta asignatura el estudiante será capaz de resolver problemas de aplicación de las distintas disciplinas de la ciencia, por ejemplo: física, química, biología, economía, etc. Otra de las ventajas de la asignatura es su carácter propedéutico, con lo cual el estudiante egresa de la educación media superior con los conocimientos necesarios para ingresar al nivel superior.

III. **DIAGNÓSTICO DEL GRUPO:**
CONOCIMIENTOS REQUERIDOS: El estudiante debe poseer una aceptable comprensión de lectura, un dominio de las operaciones aritméticas, un dominio de las operaciones algebraicas, conocimientos básicos de geometría y trigonometría así como de geometría analítica, cálculo diferencial & integral.
CONOCIMIENTOS ESPERADOS: Los conocimientos esperados son los relacionados con el álgebra como mínimo, los cuales se constataran mediante un sencillo examen diagnóstico.

IV. **CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES A FOMENTAR EN LOS ALUMNOS DURANTE EL CURSO**

SABER (CONOCIMIENTO)
El alumno conocerá la importancia de representar y resolver problemas reales mediante la ayuda de la ecuación de primer grado, el alumno conocerá la importancia de representar y resolver problemas reales mediante la ayuda del cálculo diferencial, el alumno conocerá la importancia de representar y resolver problemas reales mediante la ayuda del cálculo integral.

HACER (HABILIDAD)
Tendrá la capacidad de resolver problemas reales los cuales involucren a la ecuación de primer grado, tendrá la capacidad de resolver problemas reales los cuales involucren al cálculo diferencial, tendrá la capacidad de resolver problemas reales los cuales involucren al cálculo integral.

SER (ACTITUD)
Tendrá la capacidad de superar retos del mundo real. Mejorar la comprensión del mundo que lo rodea. Desarrollar y fortalecer el sentido de la responsabilidad. Solidaridad (Participar en los proyectos que compartimos con otras personas).

NORMAS
Asistir puntualmente a clases, No ingerir alimentos al interior del aula, Queda prohibida la salida a los sanitarios a dos o más alumnos al mismo tiempo, Se negarán los permisos para la salida a la cafetería,
Los horarios para todo trámite administrativo son fuera del horario de clase (servicio social, justificación de faltas, control escolar, etc.).

VALORES
Respeto, Responsabilidad, Tolerancia, Honestidad Y Autodisciplina

V. CONTENIDOS

I.- Aplicaciones de la Ecuación de Primer Grado	II.- Aplicaciones del Cálculo Diferencial	III.- Aplicaciones del Cálculo Integral
• Conceptos Básicos. • Resolución de problemas planteados con palabras.	• Análisis de funciones. (Máximos y Mínimos) • Rapidez de cambio.	• Áreas bajo la curva. • Área entre curvas • Volúmenes de sólidos de revolución.
PRIMER PARCIAL	**SEGUNDO PARCIAL**	**TERCER PARCIAL**

VI. TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Concepto Fundamental
NO SE PLANEO ALGÚN TRABAJO EN ESTE CURSO

VII. EVALUACIÓN

EVALUACIÓN	VARIABLES	PI	PII	PIII	RECUPERACIÓN[1]	EXI	EXII	TITULO DE SUFICIENCIA
INFORMATIVA (SUMATIVA)	Examen parcial	50%	50 %	40* %	70 %	80 %	80 %	80 %
	Participaciones	10 %	10 %	10 %				
	Participaciones en equipo	10 %	10 %	10 %				
	Tareas	10 %	10 %	10 %				
	Carpeta de evidencias y libreta de apuntes	10 %	10 %	10 %	20 %			
	Ejercicios de apoyo	10 %	10 %	10 %	10 %	20 %	20 %	20 %
	TOTALES	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

*** NOTA: El cumplimiento de los criterios del programa de tutorías al 100%, validado con las evidencias correspondientes, le permitirá al estudiante obtener el 10 % faltante de la evaluación correspondiente al tercer parcial, el tutor se encargara de proporcionar al docente la asignación de dicho punto.**

VIII. FUENTES DE INFORMACIÓN (BÁSICA Y COMPLEMENTARIA)

BÁSICA:

Alfonse Gobran, Algebra Elemental, Ed. Iberoamerica, 2002.
Swokowki & Cole, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, ed. Thomson, 2003.
Fuenlabrada, Cálculo Diferencial, McGraw Hill, 2003.
Fuenlabrada, Cálculo Integrall, McGraw Hill, 2003.
Stewart, Cálculo en una variable, ITE, 2000.
Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Iberoamericana, 1998.
Y las paginas http://bernardsanz.webs.tl, http://cecytem_matematicas.webs.tl

COMPLEMENTARIA:

Yamane, Estadística, Oxford, 2000.
Spiegel, M.R., Probabilidad y estadística, McGraw Hill, 2000.
Walpole y Myers, Probabilidad y estadística, McGraw Hill, 1999.

NOTA: TODOS ESTOS LIBROS SE ENCUENTRAN EN LA BIBLIOTECA DE NUESTRO PLANTEL

[1] En caso de no acreditar alguna de las evaluaciones parciales, el alumno deberá entregar la libreta de apuntes **nueva y completa**, junto con todos los ejercicios de apoyo del semestre, esto con el fin de que si llega a la instancia extraordinaria, tenga todo el material de estudio.

CONCEPTOS BÁSICOS

Igualdad: Es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

$$a = b + c \quad \Leftrightarrow \quad b + c = a$$

$$3x^2 = 4x + 15 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 15 = 3x^2$$

Ecuación: Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Por conveniencia las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto, o bien por alguna letra representativa del problema en cuestión.

Ejemplo: $5x + 2 = 17$

Es una ecuación, ya que es una igualdad en la que existe una incógnita, la *x*, y esta igualdad solo es verdadera para el valor de $x = 3,$ lo que se comprueba fácilmente al utilizar el valor numérico en la ecuación:

$$5(3) + 2 = 17$$
$$15 + 2 = 17$$
$$17 = 17$$

Si tomamos un valor diferente de 3, la igualdad ya no se cumple.

Identidad: Es una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las literales que entran en ella.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

El signo de identidad es $\equiv$, que se lee como "*idéntico a*".

$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

Miembros de una ecuación

$$\underbrace{3x - 5}_{\substack{\text{Primer} \\ \text{Miembro}}} = \underbrace{2x - 3}_{\substack{\text{Segundo} \\ \text{Miembro}}}$$

TIPOS DE ECUACIONES

- Ecuación Numérica: Es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas:
$$4x-5=x+4$$
- Ecuación Literal: Es una ecuación que además de las incógnitas tiene otras letras, las cuales representan cantidades conocidas.
$$3x+2a=5b-bx$$
- Ecuaciones Enteras: Son aquellas donde ninguno de sus términos tiene denominador distinto de uno.
$$4x-5=x+4$$
- Ecuaciones Fraccionarias: Son aquellas donde alguno o todos sus términos tienen denominador distinto de uno.
$$\frac{3}{2}x+\frac{6}{5}x=5+\frac{x}{5}$$

Grado de una Ecuación

Es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación.

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineales; a las de segundo grado, cuadráticas; a las de grado 3, cúbicas.

Raíces o Soluciones: son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación.

Resolución de una Ecuación: es el proceso de hallar las raíces de una ecuación, es decir, el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, los resultados serán iguales.

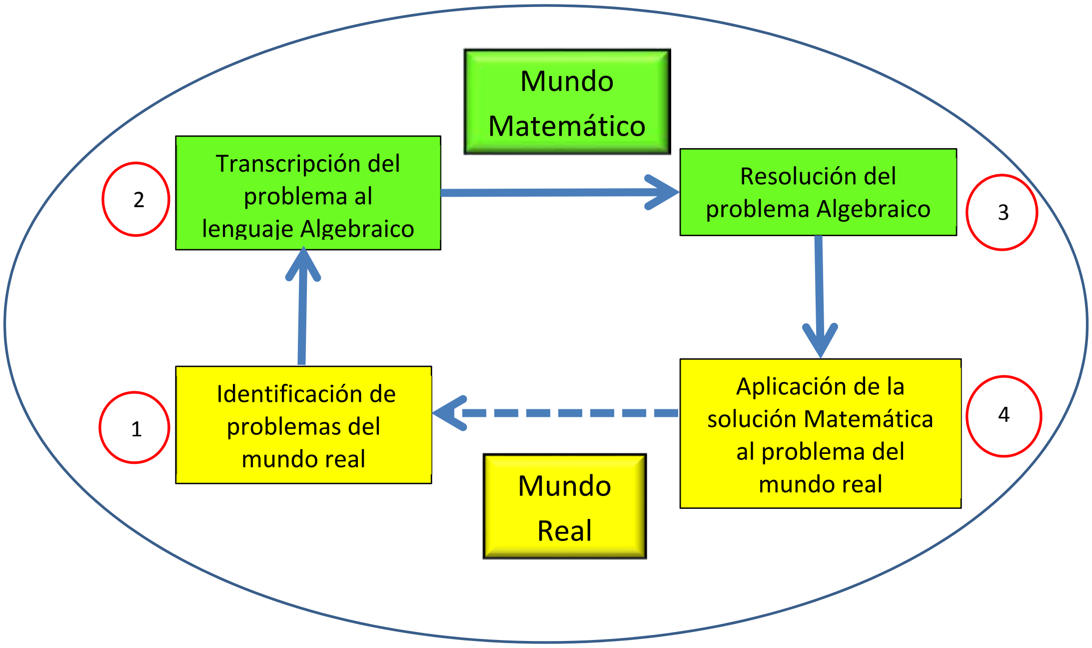
En otras palabras:

1) Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
2) Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad permanece.
3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad persiste.
4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad continúa.
5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se les extrae una misma raíz, la igualdad sigue.

EL ÁLGEBRA COMO UN LENGUAJE (LENGUAJE COMÚN $\Leftrightarrow$ LENGUAJE ALGEBRAICO)

El principal uso de las matemáticas, especialmente el álgebra, es el resolver problemas.

El siguiente diagrama nos muestra el proceso que se lleva a cabo en la solución de problemas reales.



En el paso 4, en caso de que la solución matemática no satisfaga el mundo real, regresamos al paso 1 y debemos replantear el problema ya que el modelo matemático generado en el paso 2 no describe plenamente al problema real.

Es fácil hacer una traducción de un lenguaje a otro, por ejemplo para las operaciones fundamentales podemos emplear otras palabras comunes como lo son:

Operación	Lenguaje Común
Suma	Más, añadido a, aumentado en, más que, la suma de, etc.
Resta	Menos, sustraer, diferencia, menor que, reducido en, disminuido en, etc.
Multiplicación	Por, veces, producto, multiplicado por, etc.
División	Cociente, dividido entre, razón de, entre, por, etc.

Un número aumentado en 15: $x+15$

Un número reducido en 20: $x-20$

La diferencia entre dos números: $x-y$

El producto de dos números: $x \cdot y$

La razón de dos números: $\frac{x}{y}$

50 disminuido tres veces un número: $50-3x$

Los siguientes son más ejemplos de ciertas frases y problemas verbales con sus equivalentes algebraicos:

1. Un número aumentado en 6.

$x+6$

2. Un número disminuido en 3.

$x-3$

3. Un número supera en 8 a otro.

Primer número	*Segundo número*
$x+8$	x

4. Un número es 3 unidades menor que otro.

Primer número	*Segundo número*
$x-3$	x

5. La suma de dos números es 20.

Primer número	*Segundo número*
x	$20-x$

6. Tres enteros consecutivos.

Primer entero	*Segundo entero*	*Tercer entero*
x	$x+1$	$x+2$

7. Tres enteros impares consecutivos.

Primer entero	*Segundo entero*	*Tercer entero*
x	$x+2$	$x+4$

8. Tres enteros pares consecutivos.

Primer entero	*Segundo entero*	*Tercer entero*
x	$x+2$	$x+4$

9. Un número es la mitad de un segundo número.

Primer número	*Segundo número*
$\frac{x}{2}$	x

O bien

x	$2x$

10. Un número es el triple de otro.

Primer número	*Segundo número*
$3x$	x

11. Un número es 3 unidades menor que el doble de un segundo número.

Primer número	*Segundo número*
$2x-3$	x

12. Un número supera en *5* al triple de un segundo número.

Primer número	*Segundo número*
$3x+5$	x

13. El número a supera en 6 al número b.

$a-6=b$ o bien $a=b+6$

14. El número a es 10 unidades menor que el número b.

$a+10=b$ o bien $a=b-10$

15. Escribir el número 128 en forma desarrollada.

$$128=100(1)+10(2)+1(8)$$

16. ¿Cuál es el número cuyo dígito de las unidades es *3x* y el de las decenas es *x?*

Dígito de las unidades	*Dígito de las decenas*
$3x$	x

El número es $10(x)+1(3x)+=10x+3x$

17. ¿Cuál es el número cuyo dígito de las decenas es el doble del de las unidades?

Dígito de las unidades	*Dígito de las decenas*
x	$2x$

El número es $10(2x)+1(x)=20x+x$

18. ¿A qué es igual la suma de los dígitos de un número de tres cifras cuyo dígito de las unidades supera en 3 al de las decenas, y el de las centenas es 1 unidad menor que el de las decenas? ¿Cuál es el número?

Dígito de las unidades	*Dígito de las decenas*	*Dígito de las centenas*
$x+3$	x	$x-1$

La suma de los dígitos es $(x+3)+x+(x-1)$

El número es $1(x+3)+10(x)+100(x-1)$

19. Un 6% de impuesto sobre x dólares.

$$\text{Impuesto} = 6\%x = 6\cdot\frac{1}{100}x \quad \text{o} \quad \frac{6}{100}x = \frac{3}{50}x$$

20. Un descuento de 15% sobre x dólares.

$$\text{Descuento} = 15\%x = 15\cdot\frac{1}{100}x \quad \text{o} \quad \frac{15}{100}x = \frac{3}{20}x$$

21. El valor de x estampilla de veinticinco centavos.

$$Valor = 25(x) = 25x\ ₡$$

22. El valor de x cuartos de dólar en centavos de dólar.

$$Valor = 25(x) = 25x\ ₡$$

23. El valor de $(x+2)$ monedas de cinco centavos de dólar en centavos.

$$Valor = 5(x+2)\ ₡$$

24. El valor en dólares de x billetes de cinco dólares.

$$Valor = 5(x) = \$5x$$

25. La cantidad de plata contenida en x libras de una aleación de plata al 6%.

$$\text{Cantidad de Plata} = 6\%x \text{ libras} = \frac{6}{100}x \text{ libras}$$

26. La cantidad de alcohol en $(x+5)$ galones de una solución de alcohol al 80%.

$$\text{Cantidad de alcohol} = 80\%(x+5) \text{ galones}$$

27. Sí Roberto puede caminar x millas por hora, ¿qué distancia recorrerá en 3 horas?

$$\text{Distancia} = 3x \text{ millas}$$

28. Si Catalina conduce a 55 millas por hora, ¿qué distancia puede recorrer en t horas?

$$\text{Distancia} = 55t \text{ millas}$$

29. Si Juan tardó 20 minutos en conducir 15 millas, ¿a qué velocidad estuvo manejando?

$$20 \text{ minutos} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{hora}$$

$$\text{Velocidad} = \frac{15 \text{ millas}}{\frac{1}{3} \text{ hora}} = 45 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}$$

30. Gregorio puede viajar en su bicicleta a· una velocidad promedio de 15 millas por hora, ¿cuánto demorará en recorrer x millas?

$$\text{Tiempo} = \frac{x \text{ millas}}{15 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}} = \frac{x}{15} \text{ hora}$$

31. La anchura de un rectángulo es de x pies. ¿Cuál es su perímetro si su longitud es el doble de su anchura?

Anchura	*Longitud*
x	$2x$

$$\text{Perímetro} = 2(x+2x) \text{ pies} = 2(x) + 2(2x)$$

32. La anchura de un rectángulo es de x pies. ¿Cuál es el área del rectángulo si su longitud mide 4 pies más que su anchura?

Anchura	*Longitud*
x pies	$(x+4)$ pies

$$\text{Área} = x(x+4) \text{ pies}^2$$

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS PLANTEADOS CON PALABRAS:

1. Lea el problema cuidadosamente.
2. Dibuje un esquema (si es posible).
3. Construya una tabla o cuadro para resumir los datos (si es posible).
4. Elija una variable y exprese que cantidad representa a la variable o incógnita.
5. Halle una ecuación (modelo) que contenga a la incógnita, busque dos cantidades iguales o dos formas equivalentes de expresar la misma cantidad.
6. Resuelva la ecuación.
7. Compruebe que la solución matemática satisfaga al problema original.

Bibliografía:

1. Gobran A., Álgebra elemental, Ed. Iberoamericana, México, 2010.
2. Philips E. P., Butts T. y Shaugnessy M., Algebra con aplicaciones, Ed. Harla, México, 2003.
3. Angel A. R., Álgebra Elemental, Ed. Pearson Education, México, 2010.
4. Baldor A., Álgebra, Ediciones y distribuciones Codice, S.A., México, 2010.

RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS EMPLEANDO A LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

1. Si a un numero se le suma 15, el resultado es 21. Determine el número.
2. Cuando se resta 11 de cierto número, el resultado es 52. Obtenga el número.
3. Si al doble de un número se le aumenta 7, resulta 35. Halle el número.
4. El triple de un número disminuido en 19 es 53, determine el número.
5. Ocho veces un numero es 30 unidades mas que 6 veces el mismo. Encuentre el número.
6. Si a siete tantos de un numero se le suma 6, resulta el numero aumentado en 24. Obtenga el número.
7. La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determínelo.
8. Dos terceras partes de un número exceden a la mitad de él en 3 unidades. Encuentre el número.
9. Tres medios de un número superan a cinco sextos del número en 4 unidades. Obtenga el número.
10. La suma de tres números es 136. El segundo supera en 8 al primero, y el tercero es 15 menos que el segundo. Obtenga los números.
11. El costo de una botella de licor es $19.25 y su precio de venta es $25. ¿Cual es el margen de utilidad sobre el precio de venta?
12. El precio de venta de un reloj es de $126. ¿Cual es el costo si el margen de utilidad es el 40% del costo?
13. El precio de venta de una estufa eléctrica es de $756. ¿Cual es el costo si la ganancia es el 35% del costo?
14. El costo de una alfombra es de $581. ¿Cual es el precio de venta si el margen de utilidad es el 30% del precio de venta?
15. El costo de un automóvil es de $7320. ¿Cual es el precio de venta si el margen de utilidad es el 25% del precio de venta?
16. Dos sumas de dinero que totalizan $30000 ganan, respectivamente, 6% y 9% de interés anual. Encuentre ambas cantidades si, en conjunto, producen una ganancia de $2340.
17. Dos sumas de dinero que totalizan $45000 ganan, respectivamente, 6.8% y 8.4% de interés anual. Halle ambas cantidades si juntas dan una ganancia de $3524.
18. La edad actual de Pablo es el doble de la de su hermano. Hace cuatro años Pablo tenia el triple de la correspondiente a su hermano. ¿Cual es la edad actual de Pablo?
19. La edad actual de Bernardo es el triple de la de Amalia. Hace dos años él tenia el quíntuplo de la edad que correspondía a Amalia. ¿Cuales son sus edades actuales?
20. Ricardo tiene actualmente $\frac{1}{3}$ de la edad de su padre. Dentro de diez años tendrá la mitad de la edad correspondiente de su padre. ¿Cual es la edad actual de Ricardo?
21. La edad actual de Dulce es $\frac{1}{2}$ de la de su hermana. Dentro de siete años Dulce tendrá $\frac{2}{3}$ de la edad de su hermana. ¿Cual es la edad actual de su hermana?
22. Hace dos años Cristina tenia $\frac{1}{9}$ de la edad que correspondía a la de su mama. Dentro de 16 años Cristina tendrá $\frac{7}{15}$ de la edad de su mama. ¿Cual es la edad actual de la mama de Cristina?
23. Un hombre mezcla 100 libras de una aleación de cobre al 90% con 150 libras del mismo tipo de aleación al 60%. ¿Cual es el porcentaje de cobre en la mezcla?
24. Un platero mezcló 20 kilogramos de una aleación de plata al 70% con 55 kilogramos de la misma aleación al 40%. ¿Cual es el porcentaje de plata en la mezcla?

25. Susana mezcló 800 gramos de una solución de yodo al 6% con 700 gramos de una solución de yodo al 9%. ¿Cual es el porcentaje de yodo en la mezcla?
26. Jaime mezcló 45 litros del mismo tipo de solución al 18% con 60 litros de una al 32%. ¿Cual es el porcentaje de acido en la mezcla?
27. Rodrigo mezcló 60 libras de una aleación de aluminio al 30% con 140 libras de la misma aleación. ¿Cual es el porcentaje de aluminio en la segunda aleación si la mezcla es de 65% de aluminio?
28. Un químico mezcló 200 gramos de una solución de yodo al 30% con 500 gramos de otra solución de yodo. ¿Cual es el porcentaje de yodo en la segunda solución si la mezcla es de 20% de yodo?
29. Margarita mezcló 30 litros de una solución desinfectante al 46% con 55 litros de otra. ¿Cual es el porcentaje de desinfectante en la segunda si la mezcla contiene 24% de desinfectante?
30. Rene mezcló 42 kilogramos de una aleación de cobre al 80% con 78 kg de otra aleación. ¿Cual es el porcentaje de cobre en la segunda aleación si la mezcla es de 57.25% de cobre?
31. Julia mezcló una aleación de plata al 40% con otra, al 90%, para hacer una al 75%. Si hay 20 onzas más de la aleación al 90% que de la de 40%, ¿cuantas onzas hay en la mezcla total?
32. Dos clubes que se hallan a 25 millas entre sí decidieron acampar juntos en cierto punto intermedio. Si uno de los grupos camina un tercio de milla por hora más aprisa que el otro y se encuentran en 3 horas, ¿cuál es la velocidad de cada grupo?
33. Un automóvil parte a una velocidad de 50 mph. Un segundo sale 3 horas mas tarde a una velocidad de 65 mph para alcanzar al primero. ¿En cuantas horas alcanzará el segundo auto al primero?
34. Un hombre cabalgó de ida a una velocidad de 30 mph y de regreso a una de 35 mph. Su viaje redondo duró 6½ horas. ¿Que distancia recorrió?
35. Bertha condujo su automóvil 48 minutos a cierta velocidad. Una descompostura la obligó a reducirla en 30 mph por el resto del viaje. Si la distancia total recorrida fue de 65 millas y le tomó 2 horas y 3 minutos, ¿que distancia manejó a la velocidad baja?
36. Enrique manejó 40 millas. En las primeras 20 hizo un promedio de 60 mph y condujo las restantes 20 a una velocidad promedio de 40 mph. ¿Cual fue la velocidad promedio del recorrido total?
37. Un hombre manejó 20 millas a una velocidad media de 30 mph y las siguientes 80 a la de 60 mph. ¿Cual fue la velocidad promedio del recorrido total?
38. Samuel viajó en autobús a una ciudad a 60 millas de distancia y regresó a casa en su bicicleta. El autobús viajó al doble de la velocidad de la bicicleta y el viaje redondo duró 4½ horas. ¿A que velocidad viajó Samuel en su bicicleta?
39. Jorge tenía una cita para una comida a 96 millas de distancia. Manejó a una velocidad media de 28 mph en la ciudad y a 60 mph en carretera. Si el viaje duró 2 horas, ¿que distancia manejó en la ciudad?
40. Un muchacho que se encontraba en una parada de autobús se enteró que este partiría dentro de 38 minutos; así que decidió irse corriendo a casa. Corrió a una velocidad promedio de 12 mph y llegó a su casa al mismo tiempo que el autobús. Si este viajó a una velocidad promedio de 50 mph ¿a que distancia estaba de su casa el muchacho?

Aplicaciones de la derivada

El cálculo se inventó en el siglo XVII para proporcionar una herramienta que resolviera algunos problemas en los que interviene el movimiento (velocidad y aceleración). Aunque el cálculo se concibió para ayudar a resolver algunos problemas de física, posteriormente se ha aplicado en muchos campos diferentes de la ciencia. Una de las razones por las que es tan versátil, es que la derivada es útil en el estudio de las razones de cambio de muchas cantidades. Por ejemplo un químico puede usar las derivadas para predecir el resultado de algunas reacciones químicas, un biólogo puede usarlas en sus investigaciones sobre la razón de crecimiento del número de bacterias en un cultivo, un ingeniero electricista puede usar la derivada para describir el cambio de la corriente en un circuito eléctrico, los economistas la han aplicado en problemas relacionados con las pérdidas y las ganancias de una empresa, muchos problemas sobre máximos y mínimos pueden resolverse con la ayuda de la derivada.

Los siguientes problemas pueden resolverse por medio de la derivada:

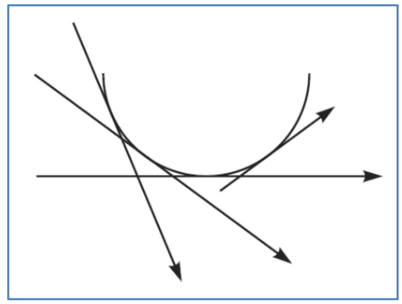
- ¿A qué ángulo de elevación debe dispararse un proyectil para que llegue lo más lejos posible?
- ¿Qué dimensiones debe tener una lata metálica con un volumen determinado para que la cantidad de metal necesaria en su construcción sea mínima?
- ¿Cómo puede cierta compañía hacer para que su ingreso sea máximo?
- ¿Cómo puede un productor minimizar el costo de producción de cierto artículo?
- Etcétera

MAXIMOS Y MINIMOS

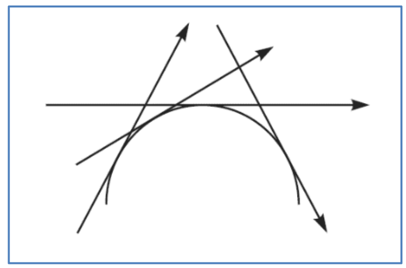
Conceptos básicos

Concavidad: Desde el punto de vista intuitivo, se dice que el arco de una curva es cóncavo hacia arriba, si tiene una forma de taza, y es cóncavo hacia abajo si tiene la forma de una cúpula.

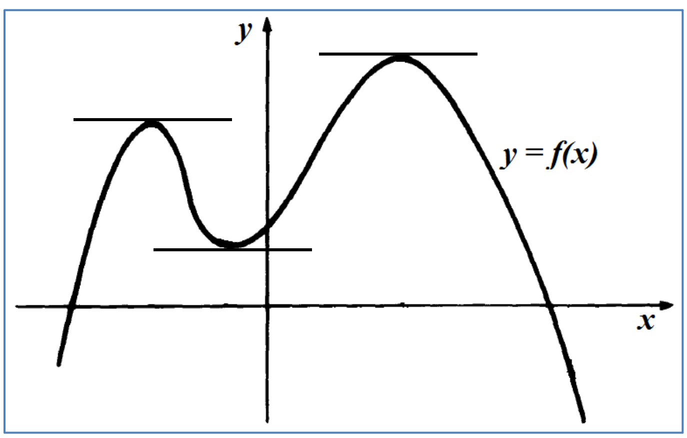
Definición: un arco es **cóncavo hacia arriba**, si para cada x_0, el arco queda por encima de la tangente en x_0 en algún intervalo abierto alrededor de x_0 .



Definición: De igual forma, un arco es **cóncavo hacia abajo** si, para cada x_0, el arco queda por debajo de la tangente en x_0 en algún intervalo abierto alrededor de x_0.



La mayoría de las curvas de funciones son combinaciones de concavidades hacia arriba y concavidades hacia abajo.



Teorema: si $f''(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces la gráfica de f es **cóncava hacia arriba** para $a < x < b$.

Teorema: si $f''(x) < 0$ para toda x en (a,b), entonces la gráfica de f es **cóncava hacia abajo** para $a < x < b$.

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión en una curva $y = f(x)$, es un punto en el cual la concavidad cambia, de manera que la curva resulta cóncava hacia arriba en un lado y cóncava hacia abajo en el otro lado del punto.

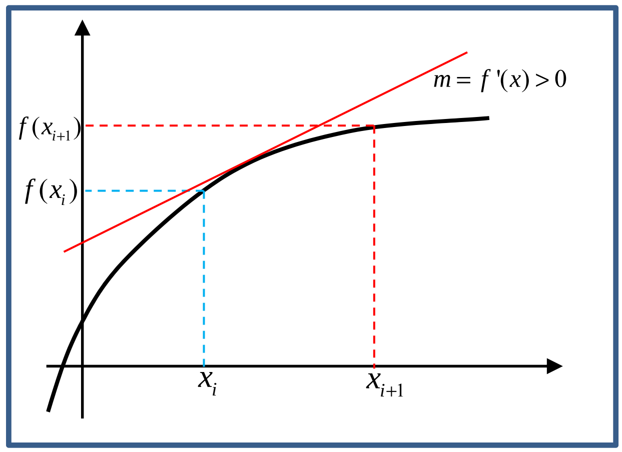
Teorema: si la gráfica de f tiene un punto de inflexión en x_0 y la f'' existe en un intervalo abierto que contiene a x_0, y f'' es continua en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$.

Función Creciente

Se dice que una función f es creciente en un intervalo cerrado $[a,b]$, si para toda $x \in [a,b]$ se cumple que:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \qquad \text{y}$$

$$f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < \cdots < f(x_n) \ .$$



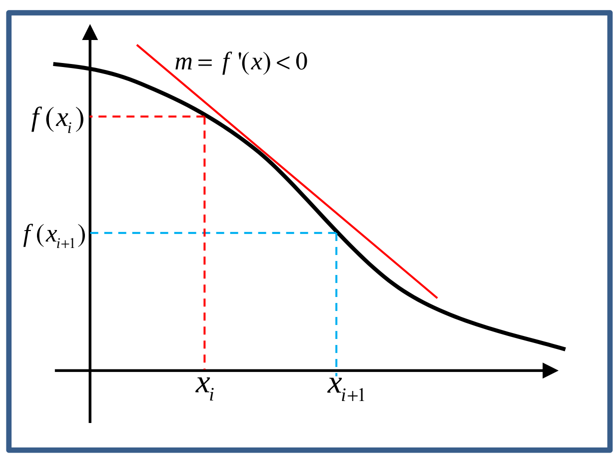
Teorema: Si $f'(x)$ es **positiva** para toda $x \in [a,b]$, entonces f es creciente en dicho intervalo.

Función Decreciente

Se dice que una función f es decreciente en un intervalo cerrado $[a,b]$, si para toda $x \in [a,b]$ se cumple que:

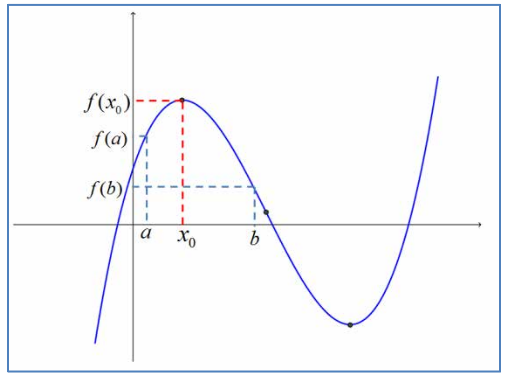
$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \qquad \text{y}$$

$$f(x_0) > f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > \cdots > f(x_n)$$

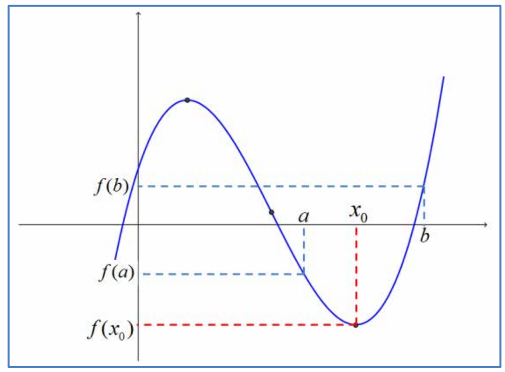


Teorema: Si $f'(x)$ es **negativa** para toda $x \in [a,b]$, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

Valores Extremos (Máximos y Mínimos)



Máximo Relativo: Se dice que una función f tiene un máximo relativo en x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a x_0, y para el cual $f(x)$ este definida. En otras palabras, el valor de f evaluado en x_0 es mayor o igual a todos los valores de f en los puntos próximos a x_0 .



Mínimo Relativo: Se dice que una función f tiene un mínimo relativo en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a x_0, y para el cual $f(x)$ este definida. Es decir, el valor de f evaluado en x_0 es menor o igual que todos los valores de f en los puntos próximos a x_0.

Extremo Relativo

Por extremo relativo de f se entiende un máximo relativo o un mínimo relativo de *f*.

Teorema: Si *f* tiene un extremo relativo en un punto x_0, en el cual $f'(x_0)$ está definida, entonces $f'(x_0) = 0$.

Valores Máximos y Mínimos

Una vez que se ha encontrado que se tiene un máximo o mínimo relativo, es importante obtener el valor de x_0 , al cual se le define como un **número crítico**.

Definición: un número x_0 en el dominio de *f*, tal que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no está definido, se llama número crítico de *f*.

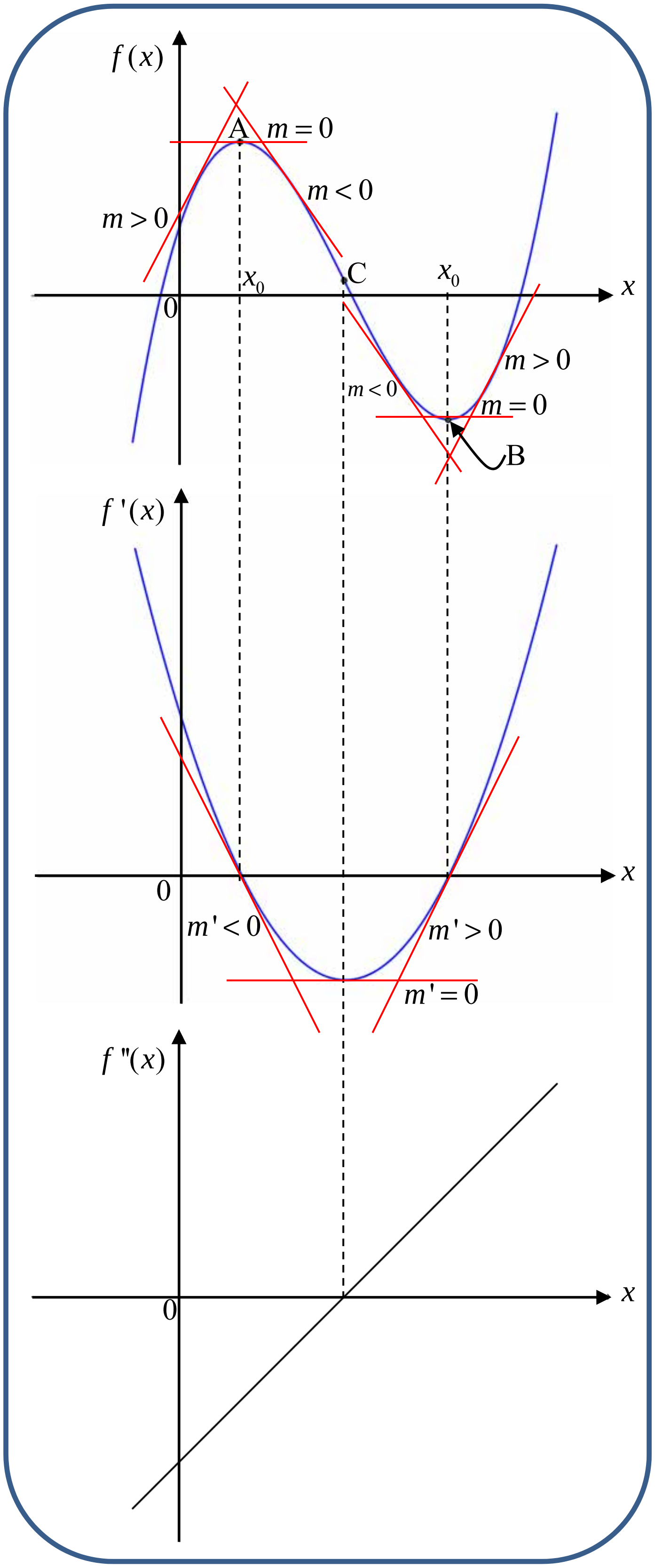
Ejemplo: hallar los números críticos x_0, de la siguiente función: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Para esto, derivamos la función, igualamos está a cero y resolvemos para la variable independiente.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \qquad\qquad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{por factorización} \qquad (3x-1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \tfrac{1}{3} = x_0} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = 1 = x_0}$$

Para saber si en algún número crítico x_0, se tiene un Máximo o un Mínimo Relativo, se emplea cualquiera de los siguientes métodos.



I. Criterio de la Primera Derivada para obtener máximos y mínimos

1.) *En x_0 se tiene un Máximo relativo si y solo sí :*

$$f'(x_0)=0\ , \quad y \quad \begin{cases} \text{para } x<x_0,\ f'(x)>0 \\ \text{para } x>x_0,\ f'(x)<0 \end{cases}$$

2.) *En x_0 se tiene un Mínimo relativo si y solo sí :*

$$f'(x_0)=0\ , \quad y \quad \begin{cases} \text{para } x<x_0,\ f'(x)<0 \\ \text{para } x>x_0,\ f'(x)>0 \end{cases}$$

II. Criterio de la Segunda Derivada para obtener máximos y mínimos

1.) *En x_0 se tiene un* **Máximo** *relativo si y solo sí :*

$$f'(x_0)=0 \quad \text{y} \quad f''(x_0)<0$$

2.) *En x_0 se tiene un* **Mínimo** *relativo si y solo sí :*

$$f'(x_0)=0 \quad \text{y} \quad f''(x_0)>0$$

3.) *En x_0 se tiene un* **Punto de Inflexión** *si y solo sí :*

$$f'(x_0)=0 \quad \text{y} \quad f''(x_0)=0$$

Donde :

A = Máximo relativo

B = Mínimo relativo

C = Punto de Inflexión

x_0 = **Número Crítico**

$$\boxed{m=f'(x)} \quad \text{y} \quad \boxed{m'=f''(x)}$$

RAZÓN DE CAMBIO

Todas las cantidades que se encuentran en la vida diaria cambian con el tiempo, especialmente en las investigaciones científicas. Por ejemplo, un químico puede estar interesado en la cantidad de cierta sustancia que se disuelve en el agua por unidad de tiempo. Un ingeniero eléctrico puede querer saber que tanto cambia la corriente en alguna parte de un circuito eléctrico por unidad de tiempo, etcétera.

Supongamos que una variable ***w*** es función del tiempo de manera que al tiempo ***t***, ***w*** está dada por $w = g(t)$, donde ***g*** es una función derivable. La diferencia entre el valor inicial y el valor final de ***w*** en el intervalo de tiempo $[t,(t+h)]$ está dada por:

$$g(t+h)-g(t), \qquad \text{entonces:}$$

1.) **La Razón de cambio promedio** de $w = g(t)$ en el intervalo $[t,(t+h)]$ es :

$$\text{Razón de cambio Promedio} = \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

2.) **La Razón de cambio instantánea** de $w = g(t)$ con respecto a t es:

$$\frac{dw}{dt} = g'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

Si *t* es cualquier variable independiente *x*, y la función se toma como $y = f(x)$, y $h = \Delta x$ entonces:

1.) Razón de cambio promedio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2.) Razón de cambio instantánea:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Movimiento rectilíneo

Es el movimiento de un objeto en línea recta. ***s*** denota la coordenada del objeto en cualquier momento ***t***, entonces la posición del objeto está dada por la función $s = f(t)$.

La velocidad instantánea en el tiempo ***t*** se define como:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

El signo de la velocidad instantánea indica en qué dirección se mueve el objeto a lo largo de la recta.

- Si $v = \frac{ds}{dt} > 0$ en un intervalo de tiempo, entonces, se sabe que "***s***" debe ser creciente.

- Si $v = \frac{ds}{dt} < 0$, entonces el objeto se está moviendo en la dirección de "***s***" decreciente.

La rapidez se define como el valor absoluto de la velocidad.

$$\text{Rapidez} = |v|$$

De esta forma la rapidez indica que tan rápido se mueve el objeto, pero no su dirección.

La aceleración "***a***" de un objeto que se mueve en línea recta está definida por la razón en la cual cambia la velocidad, es decir, la derivada de la velocidad.

$$a = \frac{dv}{dt} = v' = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''$$

Ejemplo: Sea la posición de un automóvil en una autopista dada por la ecuación $s = f(t) = t^2 - 5t$ donde ***s*** se mide en millas y ***t*** en horas.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(t^2 - 5t\right)}{dt} = 2t - 5$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(2t - 5\right)}{dt} = 2$$

La $velocidad = v = 2t - 5 \ \frac{mi}{hr}$ y la aceleración seria $a = 2\frac{mi}{hr^2}$, por consiguiente su velocidad es creciente a una razón de $2\frac{mi}{hr}$ cada hora.

Cuando un objeto que se mueve en línea recta cambia de dirección, su velocidad es cero en ese instante, por lo tanto, un cambio de dirección ocurre cuando la posición ***s*** llega a un extremo relativo, y esto sucede solo cuando $\frac{ds}{dt} = v = 0$.

BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

1) Fuenlabrada, Samuel. Cálculo Diferencial, México, McGraw Hill, 2004.
2) Granville W. A. Cálculo diferencial e integral, México, Limusa, 2000.
3) Leithold L. El cálculo, México, Oxford University Press, 1998.
4) Purcell J. E., Varberg D. y Rigdon S. E. Cálculo, México, Pearson Educación, 2001.
5) Stewart J. Cálculo, Trascendentes tempranas, México, Thomson Learning, 2002.
6) Swokowski, Earl W. Calculo con geometría analítica, México, G.E. Iberoamérica, 1989.

1) ¿Define con tus palabras a una función creciente y una decreciente?
2) Define a un extremo relativo
3) Define a un número crítico.
4) ¿Qué es el punto de inflexión de una función?
5) ¿Una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene punto de inflexión? Justifica tu respuesta.
6) ¿Para que sirven las razones de cambio en el cálculo diferencial?
7) Obtener los máximos y mínimos de las siguientes funciones, empleando el criterio de la segunda derivada y realiza un esbozo de la gráfica de dicha función:

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

b) $y = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

d) $y = x^2 - 5x + 4$

e) $f(x) = x^3 + 5x - 4$

f) $y = x^4 - 8x^2 + 16$

g) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

h) $y = 144x - 48x^2 + 4x^3$

i) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

j) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

k) $y = x^2 + 2x - 3$

l) $y = 3 + 2x - x^2$

m) $y = 5x^2 - 4x + 8$

8) Un golfista efectúa un tiro que tiene una altura aproximadamente dada por la expresión: $h = 80t - 16t^2 + 20$, donde ***h*** es la altura en pies y ***t*** es el tiempo en segundos. Encontrar el tiempo en el que la pelota alcanza su altura máxima y diga cual es esa altura.
9) Hallar el diámetro de un bote cilíndrico de hojalata de un litro de capacidad, para que en su construcción se emplee la menor cantidad de hojalata si: (a) el bote es abierto por arriba y (b) el bote esta totalmente cerrado. $A_{cil} = 2\pi rh$, $V_{cil} = \pi r^2 h$. 1litro=1000cm^3.
10) Demuestre que el rectángulo de área máxima con perímetro dado *p* es un cuadrado.
11) Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.
12) Un oleoducto va a conectar dos puntos A y B que se encuentran a 5 km uno del otro en riberas opuestas de un rio recto de 1.5 km de ancho. Una parte del oleoducto ira bajo el agua desde A hasta el punto C en la ribera opuesta del río y otra parte ira desde C hasta B sobre tierra. El costo por kilometro de oleoducto bajo el agua es cuatro veces el costo sobre tierra. Encuentre la posición de C para la cual el costo de la construcción es mínimo (ignorar la pendiente del fondo).

13) Una pieza larga y rectangular de lámina de 30 cm de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. ¿Cual debe ser el ancho de las partes dobladas para que el canal tenga una capacidad máxima?

14) El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas por año. Por cada 3 árboles más que se planten por acre, el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener el mayor número posible de manzanas al año?

15) Un gran distribuidor de pelotas de tenis esta prosperando mucho. Uno de los principales problemas del distribuidor es mantener el ritmo de la demanda de las pelotas de tenis. Las compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual de compra, posesión y mantenimiento del inventario de las pelotas de tenis se describe mediante la función:

$$C = \frac{280\,000}{q} + 0.15q + 2\,000\,000$$

Donde q es el tamaño de pedido (en docenas de pelotas de tenis) y C indica el costo anual del inventario.

a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario, y

b) ¿Cuáles se espera que sean los costos mínimos del inventario?

16) La ley de Boyle para los gases dice que PV = C, donde P es la presión, V el volumen y C es una constante. Suponga que al tiempo t (en minutos) la presión es: $P = 20 + 2t$, en cm de Hg para $0 \le t \le 10$, y que el volumen en t = 0 es de 60 cm^3. Determine la razón de cambio del volumen con respecto a t en t = 5 minutos.

17) El radio (en centímetros) de un globo esférico que se esta inflando, después de t minutos esta dado por: $r(t) = 3\sqrt[3]{t+8}$, para $0 \le t \le 10$. ¿Cuál es la razón de cambio con respecto a t de cada una de las cantidades siguientes en t = 8 minutos? (a) r(t), (b) el volumen del globo y (c) El área de la superficie del globo.

18) Un auto se mueve a lo largo de una recta según la ley $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$, donde ***s*** esta en pies y ***t*** en segundos. Determinar su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos.

19) La intensidad **I** (en amperes) de la corriente eléctrica en cierto circuito está dada por: $I = \frac{100}{R}$, donde **R** denota la resistencia (en ohms). Encuentre la razón de cambio de la intensidad **I** con respecto a **R** cuando la resistencia es de 20 ohms

20) Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura T, medida en grados Celsius después de t minutos, está dada por: $T(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8$, para $0 \le t \le 5$. (a) Calcular la razón de cambio promedio durante el intervalo de tiempo [4, 4.42] y (b) calcular la razón de cambio instantánea de $T(t)$ en t = 4.3.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

I. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

1.) En x_0 se tiene un Máximo relativo si y solo si:

$$f'(x_0)=0, \quad y \quad \begin{cases} \text{para } x < x_0, f'(x) > 0 \\ \text{para } x > x_0, f'(x) < 0 \end{cases}$$

2.) En x_0 se tiene un Mínimo relativo si y solo si:

$$f'(x_0)=0, \quad y \quad \begin{cases} \text{para } x < x_0, f'(x) < 0 \\ \text{para } x > x_0, f'(x) > 0 \end{cases}$$

II. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

1.) En x_0 se tiene un **Máximo** relativo si y solo si:

$$f'(x_0)=0 \qquad \text{y} \qquad f''(x_0)<0$$

2.) En x_0 se tiene un **Mínimo** relativo si y solo si:

$$f'(x_0)=0 \qquad \text{y} \qquad f''(x_0)>0$$

3.) En x_0 se tiene un **Punto de Inflexión** si y solo sí:

$$f'(x_0)=0 \qquad \text{y} \qquad f''(x_0)=0$$

RAZON DE CAMBIO

1.) Razón de cambio promedio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

2.) Razón de cambio instantánea:

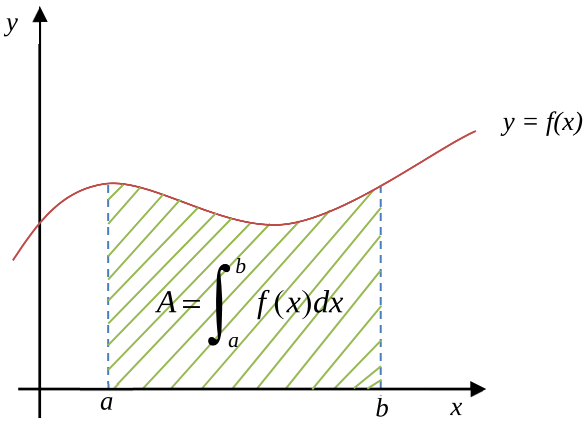
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

ÁREA BAJO LA CURVA RESPECTO A LOS EJES

Por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva $f(x)$ representada en el plano, limitada por el eje *x*, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



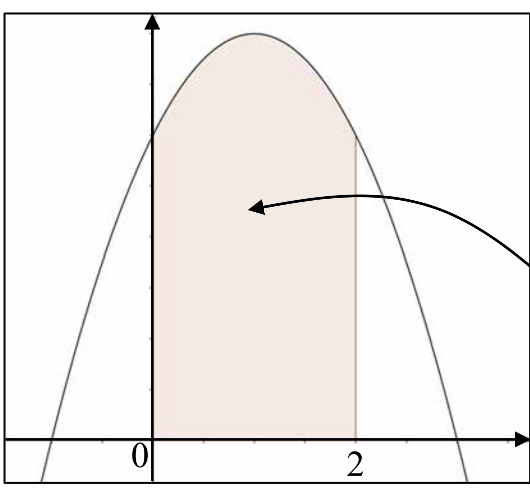
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

F = antiderivada

a = límite inferior

b = límite superior

Ejemplo 1: Calcular el área limitada por la gráfica de $y = 3 + 2x - x^2$, el eje de las x's y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.



$$A = \frac{22}{3}u^2$$

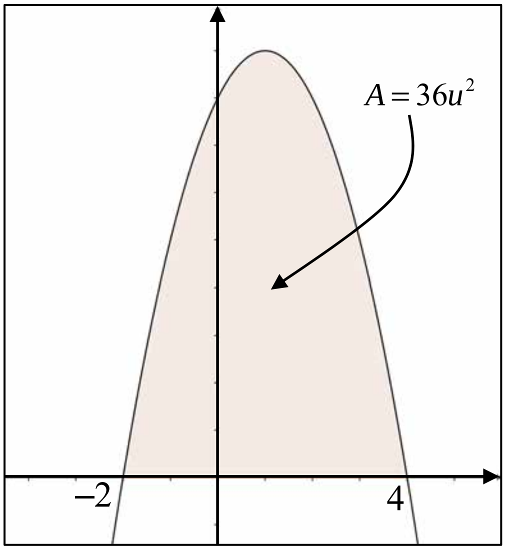
Una vez graficada la función, calculamos la integral definida:

$$\int_0^2 \left(3 + 2x - x^2\right) dx = \left[3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \left(3(2) + (2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(3(0) + (0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right) =$$

$$= 10 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{22}{3}u^2}$$

Ejemplo 2: Determina el área limitada por la parábola $y = 8 + 2x - x^2$ y el eje de las x's.



En este ejemplo no nos dan los limites de integración, pero para obtenerlos, igualamos la función a cero:

$8 + 2x - x^2 = 0 = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) = 0$

de donde: $x = -2 = a \qquad x = 4 = b$

Una vez graficada la función, calculamos la integral definida:

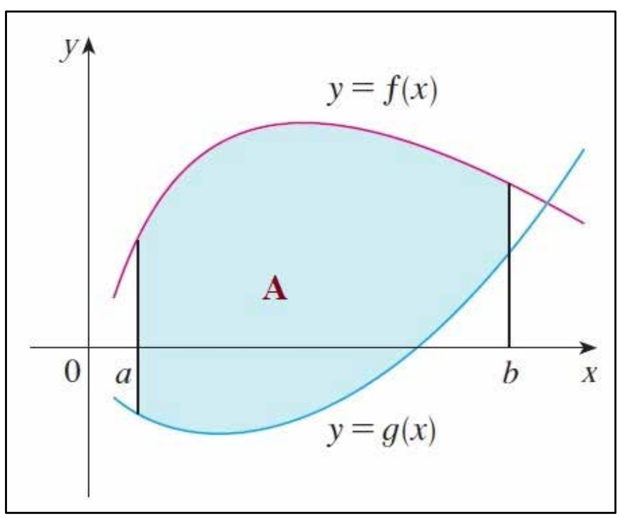
$$\int_{-2}^{4} \left(8 + 2x - x^2\right) dx = \left[8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \left(8(4) + (4)^2 - \frac{(4)^3}{3}\right) - \left(8(-2) + (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(48 - \frac{64}{3}\right) - \left(-12 + \frac{8}{3}\right) = 60 - \frac{72}{3} = \frac{108}{3} = \underline{36u^2}$$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS EN UN INTERVALO

Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, y si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en dicho intervalo:



$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Entonces el área **A** de la región acotada por las curvas de f y g, en $x = a$ y $x = b$ se puede calcular restando el área bajo la curva $g(x)$ del área bajo la curva $f(x)$, es decir:

$$A = \int_a^b \left[\, f(x) - g(x) \right] \, dx$$

Ejemplo 3: Calcular el área de la región acotada por las funciones $y_1 = 6 - x^2$ y $y_2 = 3 - 2x$.

Paso 1.- Calcular la intersección de las funciones. Esto se logra igualando las funciones:

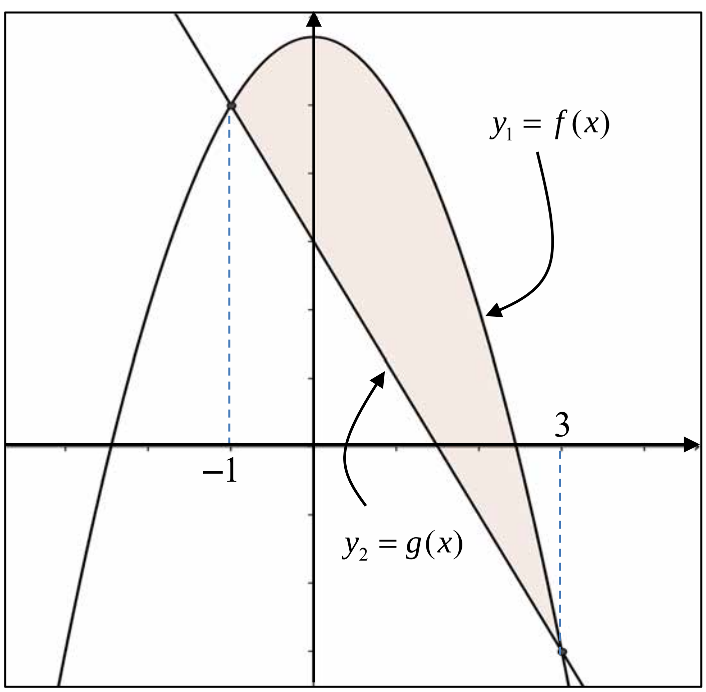
$$y_1 = y_2$$
$$6 - x^2 = 3 - 2x$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 = (x-3)(x+1)$$
$$x_1 = -1 = a \qquad x_2 = 3 = b$$

Paso 2.- Elaborar una tabla que contenga a ambas funciones en desde -1 hasta 3.

x	$y_1 = 6 - x^2$		$y_2 = 3 - 2x$
-1	5	$=$	5
0	6	$>$	3
1	5	$>$	1
2	2	$>$	-1
3	-3	$=$	-3

Se concluye de la tabla que $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$.

Paso 3.- Graficar las Funciones:



Se ratifica quien es *f(x)* y *g(x)*.

Paso 4.- Calcular el área entre las funciones:

$$A=\int_{-1}^{3}\left[6-x^2-(3-2x)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[3+2x-x^2\right]dx=\left[3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left[\left(3(3)+(3)^2-\frac{(3)^3}{3}\right)-\left(3(-1)+(-1)^2-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\left[9+9-9-\left(-3+1+\frac{1}{3}\right)\right]=9+2-\frac{1}{3}=11-\frac{1}{3}=$$

$$\boxed{A=\frac{32}{3}u^2}$$

Ejemplo 4: Calcular el área de la región acotada por las funciones $y_1=x^2$ y $y_2=\sqrt{x}$.

Paso 1.- Calcular la intersección de las funciones:

$$\begin{aligned} y_1&=y_2 \\ x^2&=\sqrt{x} \\ \left(x^2\right)^2&=\left(\sqrt{x}\right)^2 \\ x^4&=x \end{aligned}$$

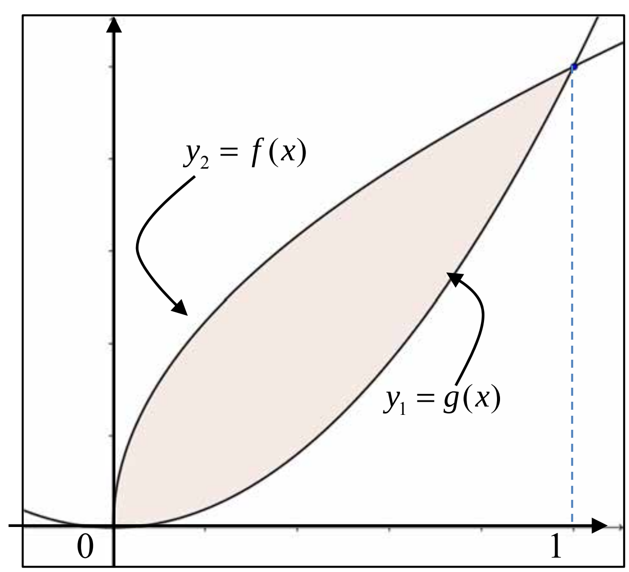
$$\begin{aligned} x^4-x&=0 \\ x\left(x^3-1\right)&=0 \\ x_1&=0=a \\ x^3-1=0\Longrightarrow x_2&=\sqrt[3]{1}=1=b \end{aligned}$$

Paso 2.- Elaborar una tabla que contenga a ambas funciones en desde 0 hasta 1.

x	$y_1=x^2$		$y_2=\sqrt{x}$
0	0	=	0
0.25	0.0625	<	0.5000
0.50	0.2500	<	0.7071
0.75	0.5625	<	0.8660
1	1	=	1

$$\Rightarrow\ y_1=g(x)\quad \text{y}\quad y_2=f(x)$$

Paso 3.- Graficar ambas funciones



Paso 4.- Se calcula el área:

$$A=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$$

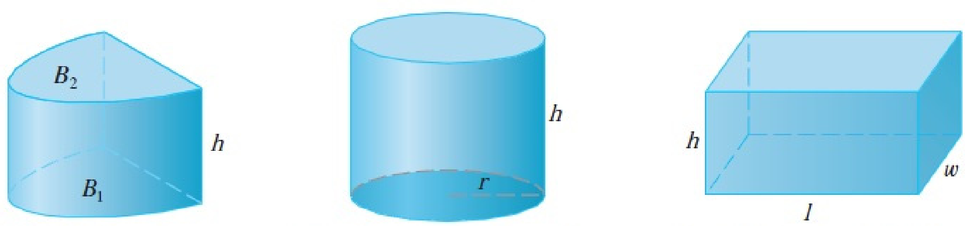
$$=\left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}-\frac{(1)^3}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{(0)^3}-\frac{(0)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{3}u^2}$$

VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

De forma intuitiva el volumen de un cuerpo se puede calcular multiplicando el área transversal por una altura o longitud, esto es de fácil comprensión para los cuerpos regulares, por ejemplo:

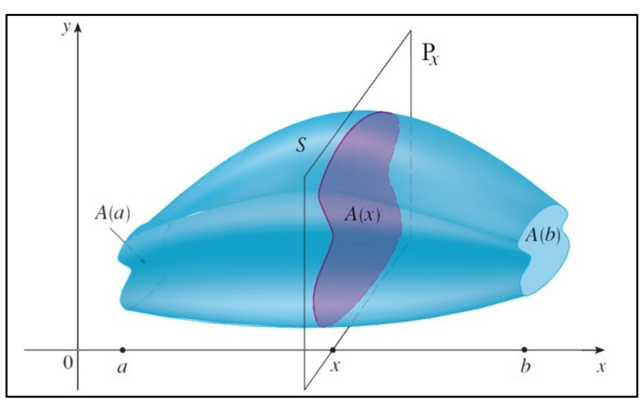


Cilindro $V = Ah$ Cilindro Circular $V=\pi r^2 h$ Caja Rectangular $V = lwh$

$$\boxed{V = Area\ \text{Transversal}\times Longitud}$$

El concepto no es tan fácil de aplicar a cuerpos irregulares, por lo que es necesaria una definición más formal de volumen.

Definición de Volumen: Sea **S** un cuerpo entre los planos P_a y P_b:



Si el área transversal de **S** en el plano P_x es $A(x)$, donde A es una función integrable, entonces el volumen de **S** es:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$$

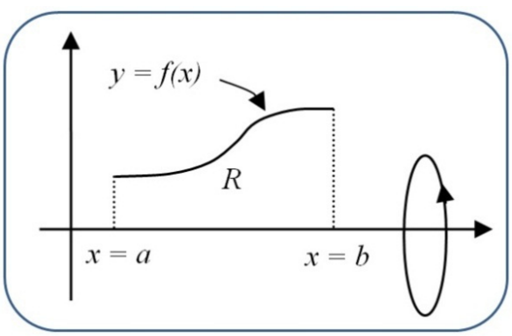
$$\underline{V = \int_a^b A(x)dx}$$

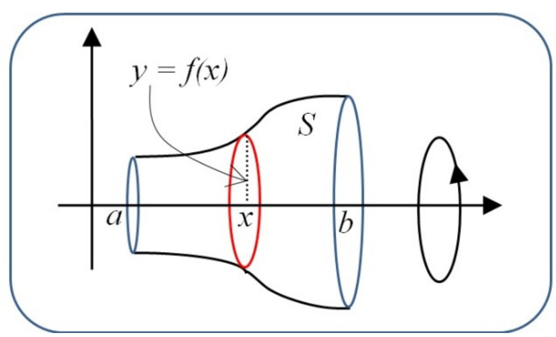
Donde $A(x)$ es el área de una sección transversal móvil, obtenida al rebanar el cuerpo en dirección perpendicular al eje *x*, pasando por *x*. El volumen se expresa en unidades cubicas, u^3.

Sólido de Revolución

Sea f una función no negativa en un intervalo $[a,b]$. Si se gira esta región del plano alrededor de cualquiera de los ejes del plano cartesiano, o de una recta del plano, al sólido resultante se le llama sólido de revolución y al eje citado como eje de revolución.

En general, sea **S** el cuerpo obtenido al hacer girar la región plana **R,** acotada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, en torno al eje *x*:





En vista de que **S** se obtiene por rotación, una sección transversal que pasa por *x* y es perpendicular al eje *x*, genera un disco circular de radio, $|y| = |f(x)|$, por lo que el área transversal es:

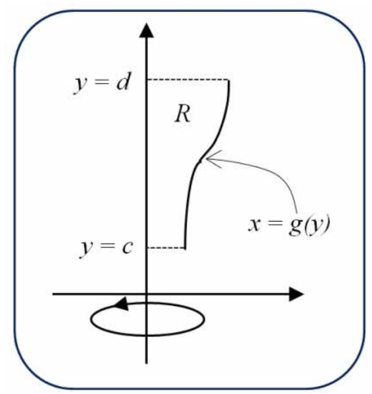
$$A(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

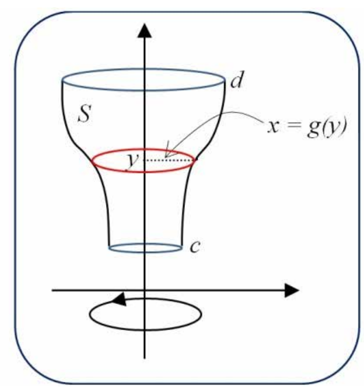
De este modo, al emplear la formula básica del volumen, se llega a la fórmula del volumen de revolución:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

A este método de obtención del volumen de un sólido de revolución se le llama método del disco. Al eje sobre el cual rota la región plana **R** se le llama eje de revolución.

Cuando el eje de revolución (rotación) es el eje de las y's, debemos considerar las siguientes figuras:





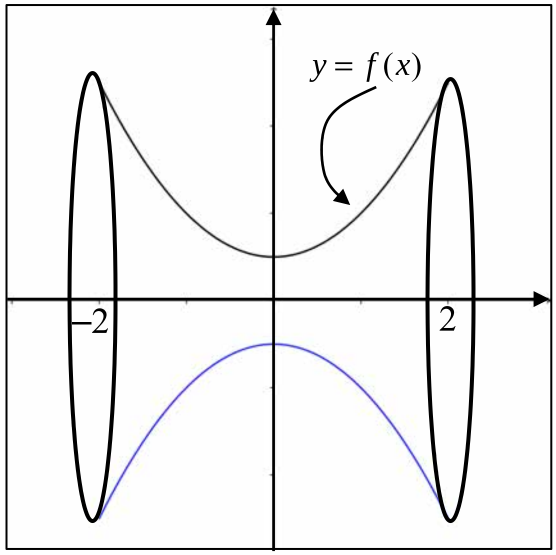
La región limitada por las curvas $x = g(y)$, $x = 0$, $y = c$ y $y = d$, se gira sobre el eje *y*, por ,o que el volumen correspondiente de revolución es:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Ejemplo 5: Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región bajo la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -2$ y $x = 2$, alrededor del eje *x*.

Como la función gira en el eje de las *x*'s emplearemos la formula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Es importante graficar la función, como es una parábola que aparece en los cuadrantes I y II, al girarla sobre el eje *x* se proyecta sobre los cuadrantes III y IV como se muestra a continuación:



Al sustituir la función y los límites de integración en la formula, tenemos:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4+2x^2+1\right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(2)^5}{5} + \frac{2}{3}(2)^3 + (2) \right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{2}{3}(-2)^3 + (-2) \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 2 \right) \right] = \pi \left[\frac{64}{5} + \frac{32}{3} + 4 \right] == \pi \left[\frac{412}{15} \right]$$

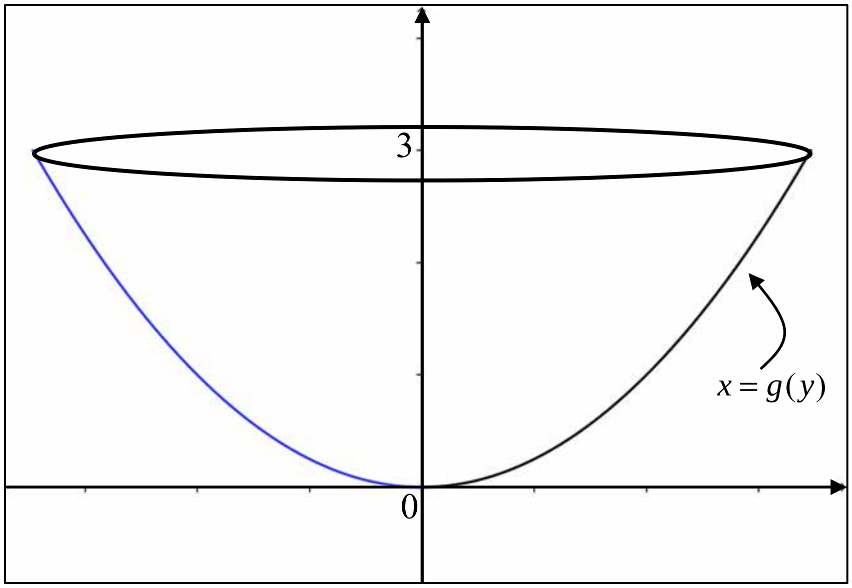
$$V = \frac{412}{15} \pi \, u^3$$

Ejemplo 6: Calcular el volumen de la región limitada por $y = x^2$, las rectas $y = 0$ y $y = 3$, si gira alrededor del eje de las *y*'s.

Como ahora la función gira en torno al eje y debemos emplear la fórmula $V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 \, dy$, por lo que debemos despejar a x de la función original:

$$x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y} = g(y)$$

Podemos apreciar que los límites de integración ya se proporcionan, $y = 0 = a$ y $y = 3 = b$, procedemos a graficar $x = \sqrt{y}$:



Y con la gráfica terminada, procedemos a calcular el volumen de la figura:

$$V = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{y} \right]^2 dy = \pi \int_0^3 y\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \pi \left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = \pi \left[\frac{9}{2} \right]$$

$$V = \frac{9}{2} \pi \ u^3$$

BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

1) Fuenlabrada, Samuel. Cálculo Integral, México, McGraw Hill, 2004.
2) Granville W. A. Cálculo diferencial e integral, México, Limusa, 2000.
3) Leithold L. El cálculo, México, Oxford University Press, 1998.
4) Purcell J. E., Varberg D. y Rigdon S. E. Cálculo, México, Pearson Educación, 2001.
5) Stewart J. Cálculo, Trascendentes tempranas, México, Thomson Learning, 2002.
6) Swokowski, Earl W. Calculo con geometría analítica, México, G.E. Iberoamérica, 1989.

CHICOLOAPAN

MATEMÁTICAS APLICADAS

Ejercicios de apoyo 3.

I.- Contesta las siguientes cuestiones:

1. Cual es el procedimiento para graficar a una función lineal.
2. Cual es el procedimiento para graficar a una función cuadrática.
3. Cual es el procedimiento para hallar la intersección entre dos funciones.
4. Cual es la interpretación geométrica de la integral definida.
5. Cual es el procedimiento para calcular una integral definida.
6. Cual es la interpretación del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral indefinida y para la integral definida.
7. Define a un sólido de revolución y a su eje de revolución.

II.- Resuelve las siguientes integrales definidas con los siguientes límites de integración:
$a = -2$ y $b = 3$

1.) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

2.) $\int (5x^2 - 4x + 8)dx$

3.) $\int (3 + 2x - x^2)dx$

4.) $\int (x^2 + 2x - 3)dx$

5.) $\int (x^2 - 5x + 4)dx$

6.) $\int (x^3 + 5x - 4)dx$

7.) $\int (x^2 - 2x + 4)dx$

8.) $\int (x^4 - 8x^2 + 16)dx$

9.) $\int (3x^3 + 2x^2 - 9x)dx$

10.) $\int (5x^3 + 7x^2 - 5x)dx$

III.- Resuelve y grafica los siguientes problemas:

1.) Calcula el área limitada por la grafica de la función $y = 3 + 2x - x^2$, el eje de las *x's* y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

2.) Calcula el área limitada por f (x) = 4 y las rectas verticales $x = 5$ y $x = 2$.

3.) Determina el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

4.) Determina el área limitada por la parábola $y = 8 + 2x - x^2$ y el eje *x*.

5.) Obtén el área de la región comprendida entre $y = x + 3$, el eje de las *x's* y las líneas verticales $x = 0$ y $x = 4$.

6.) Calcula el área de la región acotada por las funciones $y = 6 - x^2$ y $y = 3 - 2x$.

7.) Calcula el área de la región acotada por las funciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

8.) Calcula el área de la región acotada por las funciones $y = 6 - 3x^2$ y $y = 3x$.

9.) Calcula el área de la región acotada por las funciones $y = x^2 - 4$ y $y = x + 2$.

10.) Calcula el área de la región acotada por las funciones $y = x^2 - 4x$ y $y = 0$.

11.) Determina el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

12.) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$.

13.) El fabricante de un equipo industrial especial estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ de mantenimiento está representada por la función:

$$r(t) = 1000 + 25t^2$$

donde t es la edad de la máquina en años y $r(t)$ esta medida en dólares por año.

a) Determine la tasa a la que se están realizando los costos de mantenimiento cuando la máquina tenga dos años de uso.

b) ¿Cuáles son los costos de mantenimiento esperados para los tres primeros años?

14.) Una organización cívica estatal está efectuando su campaña anual de fondos que se destinan a un programa de campamento de verano para minusválidos. Los gastos de campaña se realizarán a una tasa de $ 5000 diarios. La función que describe la tasa a la que se reciben los donativos es:

$$c(t) = -10t^2 + 9000$$

donde t representa el día de la campaña y $c(t)$ es igual a la tasa a la que se reciben las contribuciones, medidas en dólares por día.

a) Determine cuanto debería durar la campaña a fin de maximizar las utilidades.
b) ¿Cuales se espera que sean los gastos totales de la campaña?
c) ¿Cuales se espera que sean las aportaciones totales?
d) ¿Cuales se espera que sean las utilidades netas?

15.) Determina la fórmula del volumen de una esfera haciendo uso de la integral definida.

16.) Calcula el volumen del sólido de revolución al girar la superficie limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, desde el eje de las *y’s* hasta la línea vertical $x = 2$, al girar alrededor del eje de las *x*.

17.) Calcula el volumen de la región limitada por $y = x^2$ y las rectas $y = 0$ y $y = 3$, si gira alrededor del eje de las *y’s*.

18.) Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región bajo la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$, entre $x = -1$ y $x = 1$ alrededor del eje *x*.

19.) La región acotada por el eje *y* y las gráficas de $y = x^3$, $y = 1$ y $y = 8$ gira alrededor del eje *y*. Calcular el volumen del sólido resultante.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

F = antiderivada
a = límite inferior
b = límite superior

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F \Rightarrow F'(x) = f(x)$

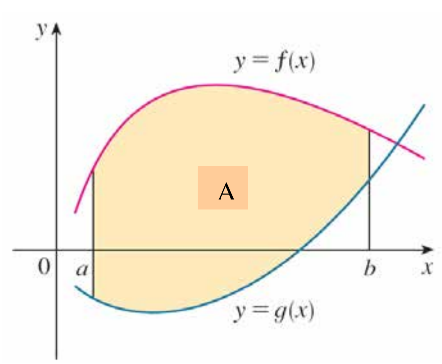
ÁREA BAJO LA CURVA RESPECTO A LOS EJES

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{[unidades cuadradas]}$$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS EN UN INTERVALO

Si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el área acotada por las dos gráficas es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



VOLUMEN DE REVOLUCION

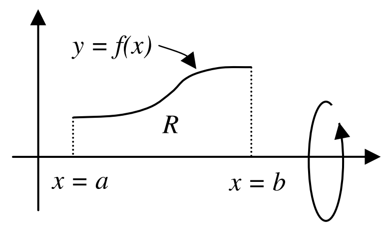
"MÉTODO DEL DISCO"

- **ROTACIÓN EN EL EJE "x"**

RADIO $= |y| = |f(x)|$

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \text{unidades cúbicas}$$



- **ROTACIÓN EN EL EJE "y"**

RADIO $= |x| = |g(y)|$

$$A(y) = \pi[g(y)]^2$$

$$V = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy = \text{unidades cúbicas}$$